

ROZDZIAŁ 1

METODOLOGIA OPISU NIELINIOWEGO

- IDENTYFIKACJA MODELI KONSTRUKCJI
PODPIERAJĄCYCH
- TRANSFORMACJA CHARAKTERYSTYK
- PRZEDZIAŁY ADEKWATNOŚCI I FUNKCJE WAGOWE

W rozdziale tym zajmiemy się zagadnieniem matematycznego opisu dwóch głównych podukładów maszyny wirnikowej, a mianowicie linii wirników z łożyskami i konstrukcji podpierającej. Są one wzajemnie sprzężone, co oznacza, że ich opis też musi być spójny. W przypadku kiedy podukłady te możemy traktować jako liniowe (tzn. kiedy przemieszczenia są proporcjonalne do sił wymuszających) zagadnienie staje się stosunkowo proste. Macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej stanowią fragment macierzy w zespolonym zapisie równań ruchu całego układu, realizując tym samym zasadę wzajemnych sprzężeń. Jest to elegancki zapis powszechnie stosowany w literaturze. Powyższe podejście, chociaż łatwe w zapisie matematycznym i interpretacji, niesie z sobą jednakże ograniczenia właściwe dla analizy liniowej, a mianowicie trajektorie przemieszczeń dowolnych węzłów układu będą zawsze elipsami a ich widma drgań posiadać będą tylko jeden prążek (synchroniczny). Możliwości oceny stanu dynamicznego układu, zwłaszcza pod kątem jego diagnostyki są zatem w tym przypadku ograniczone.

Chcąc uzyskać nieeliptyczne trajektorie, w których kształcie zakodowane są różnego rodzaju defekty w pracy układu i złożone widma drgań (stanowiące podstawę diagnostyki technicznej) musimy odnieść się do analizy nieliniowej i w innym układzie rozwiązać równania ruchu. Za podukład o naturze nieliniowej można uznać w wielu przypadkach linię wirników z imperfekcjami konstrukcyjnymi i eksploatacyjnymi (rozosiowania, pęknięcia wału) a z całą pewnością łożyska ślizgowe i uszczelnienia labiryntowe. Natomiast konstrukcję podpierającą z zadowalającym przybliżeniem uznać można jako podukład o właściwościach liniowych. Powstaje zatem kluczowe pytanie, jak połączyć w jedną spójną całość konstrukcję podpierającą o charakterystykach liniowych ze spoczywającą na niej linią wirników i łożysk o zdecydowanych nieliniowych własnościach? Tak zgrabny zabieg w postaci zespolonego zapisu macierzowego całej maszyny nie jest już możliwy. Z matematycznego punktu widzenia sytuacja komplikuje się dramatycznie.

Przedstawimy w niniejszym rozdziale propozycje rozwiązania tego zagadnienia w postaci tzw. przedziałów adekwatności charakterystyk dynamicznych konstrukcji podpierającej i odpowiedniej ich transformacji, a także przedstawimy oryginalną koncepcję udziału tych charakterystyk w dynamice linii wirników w oparciu o tzw. funkcje wagowe proporcjonalne do gęstości widmowej podpór. Zaproponowana koncepcja może mieć kapitalne znaczenie z punktu widzenia budowy relacji typu defekt-symptom, a więc z punktu widzenia nowej i szybko rozwijającej się dyscypliny wiedzy, a mianowicie diagnostyki według modelu.

W rozdziale 8 przedstawimy przykłady aplikacji tej metodologii zastosowane do małej i dużej maszyny wirnikowej.

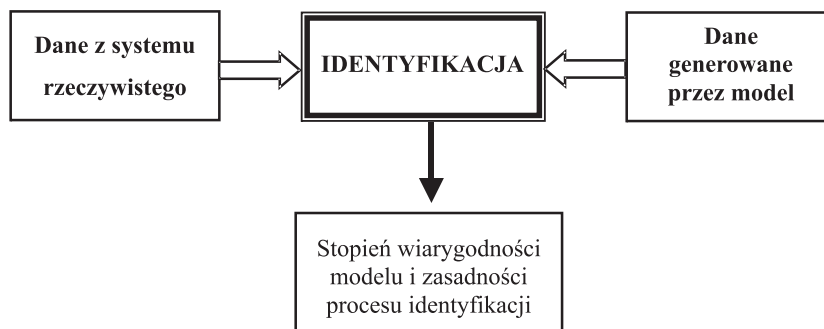
1.1 Uwagi wstępne

Zacznijmy nasze rozważania od sprecyzowania definicji pojęcia „identyfikacja”. Trzeba stwierdzić na wstępie, iż definicji tych jest bardzo wiele [1.53]÷[1.56]. Za jedną z bardziej trafnych w odniesieniu do układów mechanicznych uznać można definicję podaną w pracy [1.54]:

„przez identyfikację rozumie się proces, w wyniku którego powstaje model matematyczny badanego układu uznany zgodnie z przyjętym kryterium jakości za wystarczająco dobrze opisujący zachowanie się układu, z drugiej strony na tyle prosty, że możliwa jest jego wszechstronna analiza”.

Zdarza się jednakże tak, że w wyniku działań zwanych modelowaniem dysponujemy już modelem matematycznym i numerycznym interesującego nas układu, a problem jaki się wyłania związany jest z określeniem przedziałów adekwatności tego modelu do obiektu rzeczywistego, a więc z określeniem stopnia jego wiarygodności. **W tym kontekście pojęcie identyfikacji układu mechanicznego oznaczać będzie proces ustalania zależności pomiędzy układami rzeczywistymi a danymi generowanymi przez model, w wyniku którego uzyskujemy informacje o stopniu wiarygodności modelu i zasadności samego procesu identyfikacji.**

Powyższą definicję przedstawić można graficznie w postaci poniższego schematu.



W dalszych rozważaniach używać też będziemy pojęcia **transformacji cha-**

rakterystyk układu rozumianego jako przypadek szczególny procesu identyfikacji i odnoszącego się tylko do konkretnego obiektu i określonej klasy wejść i wyjść, czyli do konstrukcji podpierającej maszyny wirnikowej i wymuszeń harmonicznych.

Problem identyfikacji własności konstrukcji podpierającej należy do jednych z najbardziej złożonych zagadnień w dynamice maszyn wirnikowych. Zespół podpierający linię wirników jest na ogół konstrukcją bardzo złożoną składającą się z stojaków łożyskowych, fundamentu (lub ramy fundamentowej) i podłoża. Pełny opis matematyczny (lub numeryczny) takiego przestrzennego zespołu konstrukcyjnego o trudno definiowalnych warunkach brzegowych (wpływ podłoża) lub też parametrach materiałowych (np. stałe materiałowe żelazobetonu) jest praktycznie niemożliwy. Konieczne są zatem daleko idące uproszczenia. Typowym, najczęściej stosowanym w praktyce podejściem, jest próba określenia charakterystyk dynamicznych konstrukcji podpierającej (identyfikacji) na podstawie odpowiedzi na wymuszenia harmoniczne **tylko w tych punktach konstrukcji podpierającej, w których osadzone są panwie łożyskowe linii wirników**. Zbudowane w ten sposób zespolone dynamiczne charakterystyki podatnościowe stanowią punkt wyjścia do dalszych działań związanych z procedurą identyfikacji [1.1]÷[1.10]. W przypadku kiedy zakładamy w pełni liniową strukturę całego systemu: **linia wirników–łożyska ślizgowe–konstrukcja podpierająca** możliwa jest bezpośrednia implementacja zespolonych charakterystyk podatnościowych do równań ruchu systemu poprzez proste ich odwrócenie numeryczne [1.4]. Często jednak metoda bezpośredniej implementacji charakterystyk nie może być zastosowana w praktyce. Dotyczy to sytuacji, w których niektóre podukłady całego systemu chcemy opisać za pomocą związków nieliniowych, a więc związków dokładniej opisujących ich rzeczywiste charakterystyki.

Łożyska ślizgowe, a nawet wirnik w przypadku jego pęknięcia lub rozosiowania, można traktować jako człony liniowe tylko w określonych sytuacjach (np. bardzo małe drgania układu i stabilny zakres pracy). W pozostałych przypadkach problem identyfikacji konstrukcji podpierającej sprowadza się do transformacji zespolonych charakterystyk podatnościowych (łatwych do uzyskania drogą badań eksperymentalnych) do rzeczywistych charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych w miejscach posadowienia wirnika (niezbędnych w równaniach ruchu). Bezpośrednia implementacja charakterystyk podatnościowych jest tu bowiem niezwykle trudna. Dochodzimy w ten sposób do głównego problemu tak rozumianej identyfikacji: jak za pomocą tylko kilku lub kilkunastu parametrów określających rzeczywiste charakterystyki w miejscach posadowienia wirnika skutecznie zidentyfikować własności całej konstrukcji, której model modalny opisują setki lub tysiące pozostałych parametrów związanych z ilością stopni swobody układu?

W dalszych rozważaniach przedstawimy metody, które z lepszym lub gorszym przybliżeniem problem ten próbują rozwiązać. Niezależnie jednak od przyjętej metody, musimy jednakże w tym miejscu stwierdzić, iż w pełni jednoznaczna identyfikacja konstrukcji podpierającej (transformacja charakterystyk zespolonych do rzeczywistych) w dowolnym zakresie częstości wzbudzenia jest praktycznie niemożliwa. Jest to cena jaką musimy zapłacić za bardziej adekwatny do rzeczywistości opis pozostałych podukładów maszyny wirnikowej, czyli opis nieliniowy [1.5],

[1.15]÷[1.18],[1.35]÷[1.42]. Powyższy fakt, obok trudności związanych z budową bardziej złożonych modeli i czasem obliczeń numerycznych, jest zapewne główną przyczyną, dla której opis liniowy całego systemu tworzącego maszynę wirnikową jest tak popularny i tak często stosowany w praktyce [1.24], [1.26]÷[1.34]. Trzeba przyznać, iż w wielu sytuacjach jest on także bardzo użyteczny i wystarczająco trafnie przewidujący zachowanie się maszyny wirnikowej [1.2], [1.26]÷[1.34], [1.46]÷[1.48]. Z drugiej jednak strony, wyzwania jakie niesie z sobą np. diagnostyka według modelu, a więc dziedzina wiedzy, w której należy zamodelować różnego rodzaju defekty w pracy maszyny i powiązać je z ich symptomami, narzucają konieczność budowy bardziej zaawansowanych narzędzi badawczych [1.23], [1.15]÷[1.18], [1.35]÷[1.45]. Możliwie dokładna identyfikacja konstrukcji podpierającej staje się tu zagadnieniem kluczowym, bez rozwiązania którego bardziej zaawansowany opis pozostałych podukładów całego systemu nie jest w pełni zasadny.

Odrębny problem stanowi metodologia obliczeń nieliniowych całego systemu w sytuacji, kiedy proces identyfikacji konstrukcji podpierającej uznać już możemy za wystarczająco dokładny. Poza niektórymi przypadkami szczególnymi, stosunkowo prostymi do praktycznej aplikacji, na ogół mamy do czynienia z bardziej złożoną procedurą łączenia własności konstrukcji podpierającej z odpowiednią pozostałymi nieliniowymi podukładami tworzącymi cały system maszyny wirnikowej.

Obserwowana w literaturze światowej tendencja rozwoju narzędzi badawczych do nieliniowego opisu tego rodzaju układów wydaje się być w tym kontekście dość oczywista [1.15]÷[1.18], [1.35]÷[1.45].

Warto też odnotować prace poświęcone różnego rodzaju imperfekcjom wirnika [1.26, 1.27, 1.29, 1.29, 1.30, 1.32] czy też niestabilności hydrodynamicznej. Jako pozycje już klasyczne z zakresu analizy wirów i bicia olejowego a następnie antywirów uznać można prace Muszynskiej [1.46]÷[1.49]. Imponującą karierę w dynamice wirników robi eksperymentalna i eksploatacyjna analiza modalna [1.1, 1.2, 1.31, 1.32].

Powyższy przegląd literatury pozwala uwydatnić dość oczywisty fakt, iż prace z zakresu identyfikacji samej konstrukcji podpierającej [1.3]÷[1.10] i prace z zakresu obliczeń linii wirników i łożysk ślizgowych [1.15]÷[1.18], [1.26]÷[1.49] muszą posiadać elementy wspólne, ponieważ maszyna wirnikowa tworzy jedną spójną całość. Nie można analizować jednego tylko podukładu w sytuacji kiedy zakładamy oddziaływania nieliniowe w pozostałych podukładach. **Zasada superpozycji rozwiązań w tych przypadkach nie obowiązuje.**

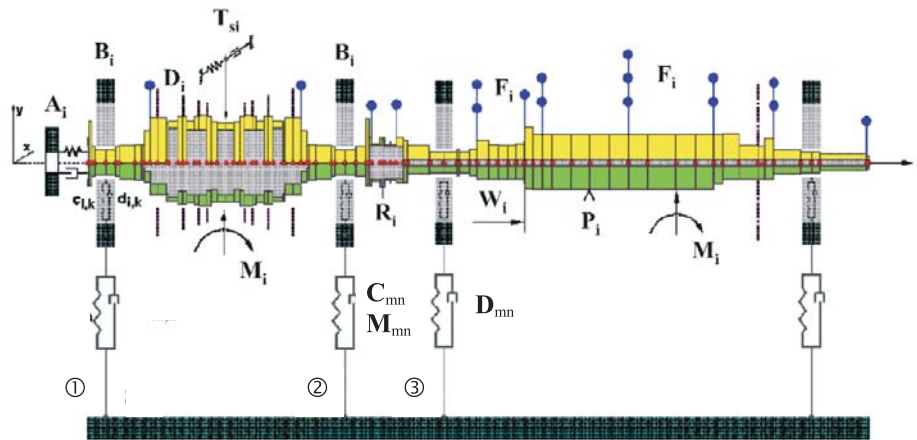
Przedstawimy w niniejszej monografii nowe, oryginalne propozycje pozwalające na wzajemnie sprzężoną analizę własności konstrukcji podpierającej oraz linii wirników i łożysk w zakresie nieliniowym.

Zacznijmy jednak od dokładniejszego sprecyzowania problemu, przyjęcia podstawowych definicji i założeń oraz opisu różnych możliwych metod identyfikacji konstrukcji podpierającej.

1.2 Sprecyzowanie problemu

Klasyczna maszyna wirnikowa – rys. 1.1, składa się z szeregu złożonych podzespołów konstrukcyjnych wzajemnie ze sobą sprzężonych. Z punktu widzenia mechaniki obiektu wyróżnić tu możemy przede wszystkim trzy główne podukłady:

- linię wirników wraz z imperfekcjami typu pęknięcia, rozosiowania, anizotropia przekroju itd.;
- łożyska ślizgowe i uszczelnienia labiryntowe;
- konstrukcję podpierającą na którą składają się podpory łożyskowe i fundament.



Rys. 1.1. Przykład złożonego układu typu linia wirników-łożyska nośne-konstrukcja podpierająca. Własności konstrukcji podpierającej opisują macierze współczynników sztywności C_{mn} , tłumienia D_{mn} i mas M_{mn} w miejscach posadowienia wirnika

Każdy z powyższych podukładów, z uwagi na stopień komplikacji konstrukcyjnej i funkcjonalnej, stanowić może odrębny problem, jeśli chodzi o opis matematyczny jego własności. Zagadnienie znakomicie komplikuje fakt, iż co najmniej jeden podukład powinno się traktować jako człon nieliniowy. Dotyczy to łożysk ślizgowych i uszczelnień labiryntowych. Własności tych podukładów można opisać za pomocą tzw. współczynników sztywności i tłumienia. W rozdziale 2. przeprowadzimy obszerną dyskusję dotyczącą zasadności takiego opisu i sposobu wyznaczenia tych współczynników. Na obecnym etapie rozważań przyjmijmy, że współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego c_{ik} oraz d_{ik} silnie zależą nie tylko od

chwilowego położenia czopa w obrębie szczeliny smarnej ε , γ , ale także od prędkości zmiany tego położenia $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\gamma}$, czyli że mamy tu do czynienia z zależnościami typu: $c_{ik}(\varepsilon, \gamma, \dot{\varepsilon}, \dot{\gamma})$ oraz $d_{ik}(\varepsilon, \gamma, \dot{\varepsilon}, \dot{\gamma})$ w biegunowym układzie współrzędnych [1.19]÷[1.22]. Można łatwo wykazać, że powyższe zależności są równoważne chwilowym położeniom wirnika w miejscach jego posadowienia. W tych miejscach bowiem elementy wirnika są czopami łożyskowymi.

Założmy, że φ_k oznacza kształt kinetostatycznej linii ugięć wirnika (zbiór kątów ugięcia w węzłach) będący wynikiem obliczeń kinetostatycznych układu z uwzględnieniem aktualnego położenia podpór w stosunku do linii geodezyjnej i oczywiście aktualnych danych geometrycznych i eksploatacyjnych maszyny wirnikowej. Ustalając położenie dowolnego punktu zbioru φ_k względem linii geodezyjnej otrzymamy tzw. kinetostatyczną linię ugięć wirnika. Linia ta, jako niezależna od czasu, stanowi jednocześnie środkową (centralną) linię drgań w zagadnieniach dynamiki. Niech φ_d oznacza chwilowy, zależny od kąta obrotu wału, a więc i od czasu, zbiór kątów we wszystkich węzłach określających kształt dynamicznej linii przemieszczeń wirnika. Linia ta, zakodowana w zbiorze $\varphi_d(\omega t)$, stanowi efekt obliczeń dynamicznych. Suma liczb znajdujących się w zbiorach φ_k i φ_d oznacza chwilowy całkowity kształt linii ugięć i przemieszczeń wirnika w stosunku do układu współrzędnych związanego z linią geodezyjną (odniesienia) wirnika, czyli

$$\varphi(\omega t) = \varphi_k + \varphi_d(\omega t). \quad (1.1)$$

Możemy teraz napisać, iż współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego i uszczelnień labiryntowych są zależne od sumarycznego chwilowego położenia wału (wirnika) w miejscach jego posadowienia. A zatem

$$c_{ik} = f_c(\varphi) \quad \text{oraz} \quad d_{ik} = f_d(\varphi), \quad (1.2)$$

gdzie φ stanowi odpowiedni element zbioru (1.1) związany z utwierdzeniem panwi.

Zależności funkcyjne f_c i f_d są bardzo złożone, a przede wszystkim silnie nieliniowe. Determinuje to nieliniowość całego rozpatrywanego układu.

Jeżeli w modelu teoretycznym maszyny wirnikowej chcemy uwzględnić imperfekcje typu pęknięcia lub rozosiowania wirnika, to okazuje się, iż wyrażenia opisujące te imperfekcje zależą również od chwilowego kształtu ugięć i przemieszczeń linii wirników φ określonego związkiem (1.1), co symbolicznie możemy zapisać jako

$$\mathbf{P}_i = f_p(\varphi) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{R}_i = f_r(\varphi), \quad (1.3)$$

gdzie \mathbf{P}_i i \mathbf{R}_i stanowią symboliczną reprezentację modeli elementów pękniętych i rozosiowanych wirnika, a f_p i f_r ich złożone zależności funkcyjne. Niestety zależności (1.3) mogą być nieliniowe, co oznacza, że w ogólnym przypadku również podukład linii wirników należy uważać jako człon nieliniowy.

Tak więc z trzech głównych podukładów maszyny wirnikowej – dwa (łożyska i linia wirników) należy traktować jako podukłady nieliniowe. Implikuje to wzajemne sprzężenia wszystkich podukładów tworzących dany obiekt i rzecz jasna narzuca konieczność nieliniowego opisu obiektu jako całości, pomimo istnienia

innych podukładów liniowych. Założenie liniowości charakterystyk statycznych i dynamicznych zasadne jest jedynie w odniesieniu do konstrukcji podpierającej. Możemy bowiem stwierdzić, na podstawie licznych badań teoretycznych i eksperymentalnych, iż współczynniki sztywności i tłumienia C_{mn} i D_{mn} oraz mas M_{mn} w wybranych punktach (węziach) konstrukcji podpierającej nie zależą ani od amplitudy wymuszeń i przemieszczeń, ani też od kierunku działania sił wymuszających, o ile oczywiście amplitudy te są wystarczająco małe. Oznacza to, wracając do naszej konwencji zapisu, iż współczynniki C_{mn} , D_{mn} , M_{mn} nie zależą również od kąta obrotu wału wirnika ωt (a zatem i od czasu) i tym samym można je traktować jako stałe dla danej prędkości obrotowej ω . A więc:

$$C_{mn}(\omega t) = const, \quad D_{mn}(\omega t) = const, \quad M_{mn}(\omega t) = const. \quad (1.4)$$

Jeżeli przyjmiemy założenie, iż obliczenia kinetostatyczne i dynamiczne prowadzimy dla ściśle określonego, uprzednio zidentyfikowanego, przedziału prędkości kątowych ω , to założenie wyrażone związkami (1.4) jest zasadne.

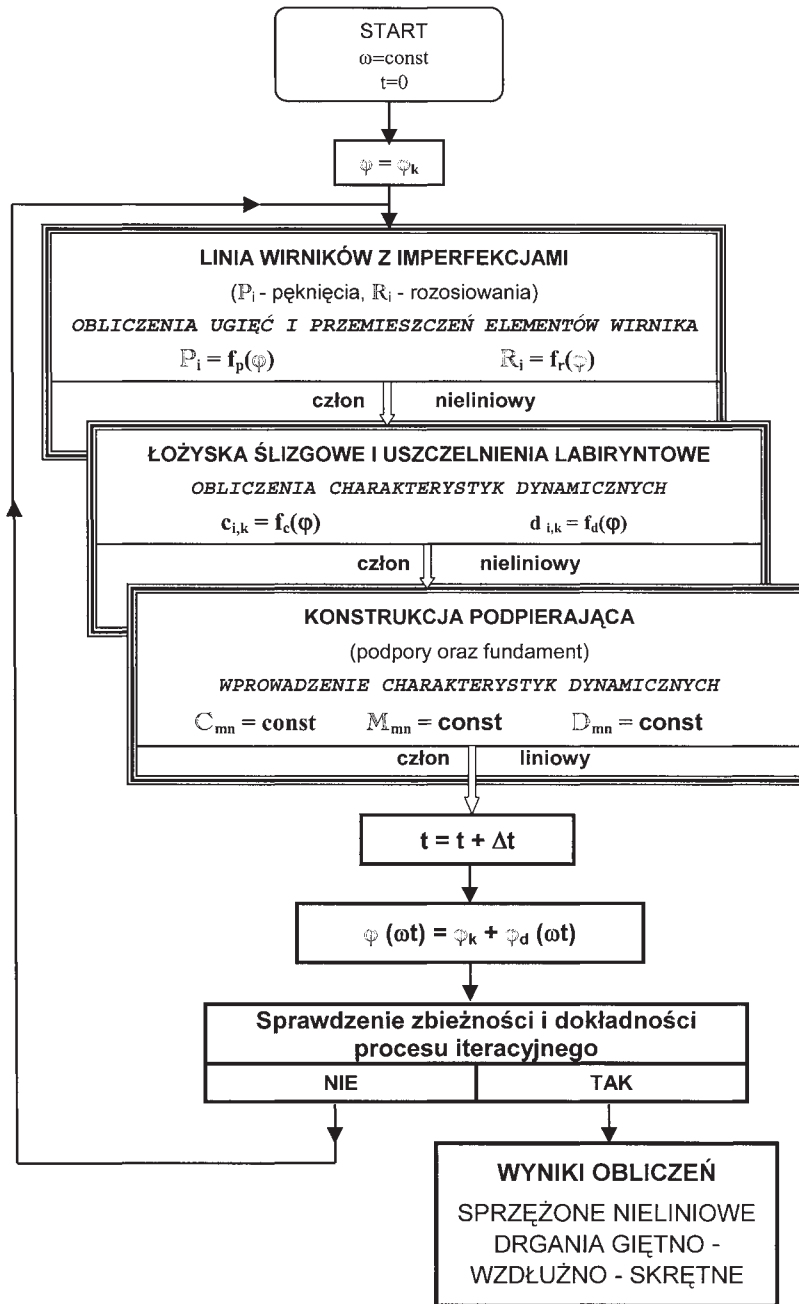
Ogólny algorytm obliczeń maszyny wirnikowej można więc przedstawić schematycznie tak jak na rys. 1.2.

Nieliniowość podukładów związanych z linią wirników i łożyskami ślizgowymi narzuca konieczność zastosowania czasochłonnej procedury iteracyjnej. Warto zwrócić tu uwagę na fakt, iż nieliniowość podukładów i ich wzajemne sprzężenia uniemożliwiają zastosowanie tak popularnej zasady superpozycji rozwiązań cząstkowych. Zasadę superpozycji stosować można jedynie w przypadku pełnej liniowości wszystkich podukładów tworzących rozpatrywany obiekt. W naszym przypadku oznaczałoby to niezależność związków (1.2) i (1.3) od kąta obrotu wału ωt a więc i od czasu, co fizycznie odpowiadać może sytuacji, w której chwilowe przemieszczenia linii wirników są wystarczająco małe. Wówczas to związki typu siła–przemieszczenia w równaniach ruchu uznać można za liniowe.

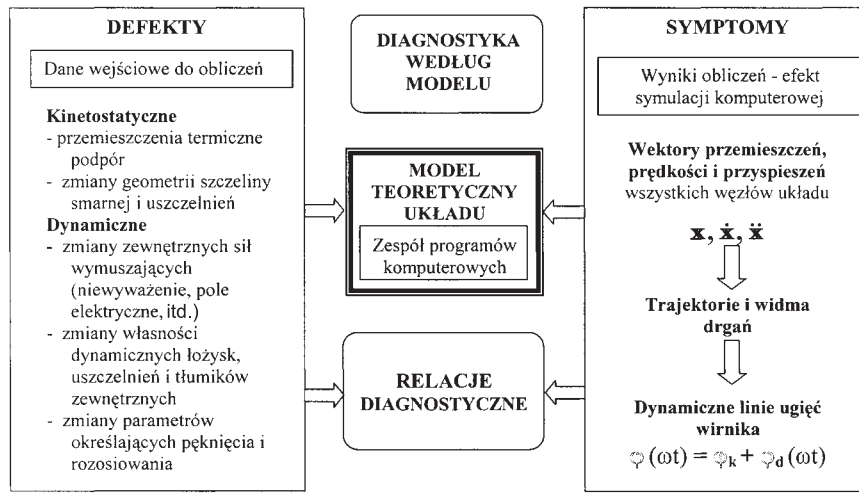
Założenie małych przemieszczeń i w konsekwencji założenie liniowych charakterystyk całego układu jest powszechną praktyką w obliczeniach dynamiki maszyn wirnikowych [1.24], [1.26] ÷ [1.34]. O ułatwieniach jakie niesie z sobą powyższe założenie wspomnimy na końcu niniejszego rozdziału.

Opis liniowy, chociaż zasadny w wielu zagadnieniach praktycznych, nie jest w stanie opisać zachowania się układu, np. po przekroczeniu granicy stabilności, a więc w warunkach występowania drgań samowzbudnych. Duże maszyny wirnikowe dość często pracują w warunkach, w których nastąpiło już formalne przekroczenie progu stabilności, a pomimo to pracują stabilnie. Z sytuacją taką mamy do czynienia, np. w przypadku wystąpienia małych drgań olejowych (wirów olejowych) w jednym z łożysk. Możliwość oceny stanu dynamicznego obiektu w tego rodzaju przypadkach stwarza jedynie opis nieliniowy.

Drugim obszarem, w którym opis nieliniowy staje się niezwykle użyteczny, jest tzw. diagnostyka według modelu. Jest to nowa, szybko rozwijająca się dziedzina wiedzy. Jej istota polega na modelowaniu różnego rodzaju defektów w pracy obiektu a następnie, drogą symulacji komputerowej pozyskiwaniu ich symptomów. Zbiory tak pozyskanych defektów i symptomów nazywane są relacjami diagnostycznymi – rys. 1.3.



Rys. 1.2. Schemat strukturalny maszyny wirnikowej i algorytm realizacji procedury iteracyjnej w obliczeniach dynamiki



Rys. 1.3. Diagnostyka maszyny wirnikowej według modelu. Koncepcja pozyskiwania relacji diagnostycznych

Gdybyśmy budowali relacje diagnostyczne jedynie w oparciu o model liniowy maszyny wirnikowej, to uzyskane informacje byłyby bardzo skromne. Nawet najbardziej zaawansowane modele liniowe dają w efekcie jedynie eliptyczne trajektorie przemieszczeń, a w widmie drgań występuje jeden tylko „prążek” synchroniczny. Tymczasem opis nieliniowy umożliwia budowę nieeliptycznych trajektorii i „wieloprążkowych” widm drgań w których kształcie zakodowane są różnego rodzaju defekty. Stwarza to jakościowo nowe możliwości budowy relacji typu defekt-symptom, co poglądowo uwidacznia rys.1.4.

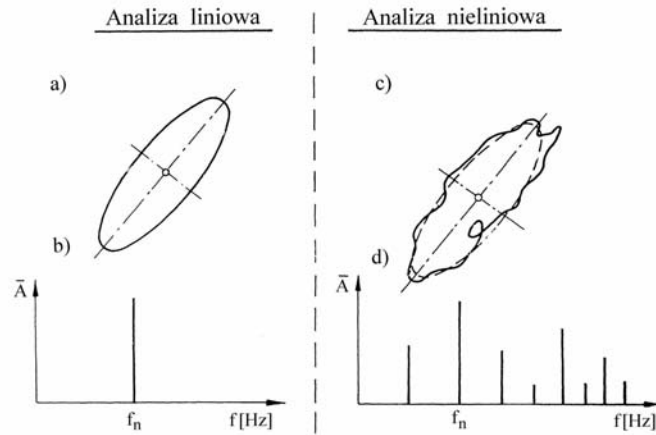
Z matematycznego punktu widzenia przedstawiony na rys. 1.1 obiekt opisywać mogą następujące nieliniowe równania różniczkowe:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbb{D}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbb{K}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{x} = \mathbb{P}(t), \quad (1.5)$$

gdzie:

- \mathbb{M} – globalna macierz bezwładności;
- \mathbb{D} – globalna macierz tłumienia;
- \mathbb{K} – globalna macierz sztywności;
- $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$ – uogólnione wektory przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń;
- \mathbb{P} – uogólniony wektor wymuszeń zewnętrznych;
- t – czas.

Równanie (1.5) jest równaniem ruchu całego układu i stanowi zestaw dziesiątków lub setek (w zależności od stopni swobody) równań różniczkowych wzajemnie ze sobą sprzężonych. Zależność macierzy \mathbb{D} i \mathbb{K} od parametrów ruchu $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ odzwierciedla tu nieliniowość strukturalną układu, która często może przyjąć charakter



Rys. 1.4. Możliwości opisu nieliniowego: nawet w stabilnym zakresie pracy maszyny umożliwia on wygenerowanie nieeliptycznego kształtu trajektorii (w którym zakodowane są defekty) i tym samym umożliwia wygenerowanie złożonych widm drgań.

nieliniowości silnej. Uogólniony wektor wymuszeń zewnętrznych $\mathbb{P}(t)$ może oczywiście opisywać dowolnie zmienne w czasie (a więc asynchroniczne i niesinusoidalne) siły działające na układ, urzeczywistniając tym samym możliwość uwzględnienia w modelu nieliniowości funkcjonalnych.

Macierze mas \mathbb{M} , tłumienia \mathbb{D} i sztywności \mathbb{K} zawierają w sobie wzajemnie powiązane charakterystyczne podmacierze (elementy) odnoszące się do głównych podukładów maszyny wirnikowej czyli linii wirników, łożysk i uszczelnień oraz konstrukcji podpierającej. Ich jawne wyodrębnienie, z uwagi na nieliniową postać równania (1.5) jest praktycznie niemożliwe. W postępowaniu iteracyjnym w każdym kroku czasowym globalne macierze tłumienia \mathbb{D} i sztywności \mathbb{K} są modyfikowane o nowe wartości współczynników sztywności c_{ik} i tłumienia d_{ik} łożysk ślizgowych i uszczelnień labiryntowych oraz o nowe dodatkowe sztywności wynikające z imperfekcji konstrukcyjnych typu pęknięcia wirnika lub rozosiowania \mathbf{P}_i , \mathbf{R}_i . W ten właśnie sposób wyraża się zależność macierzy globalnych \mathbb{D} i \mathbb{K} od parametrów ruchu \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$. Zależności te są na tyle złożone, iż bardziej konkretna prezentacja równań ruchu, poza ogólną formą zapisu jak w zw. (1.5), nie jest możliwa.

Odrębny problem stanowi kwestia numerycznego rozwiązania powyższego układu nieliniowych równań różniczkowych wzajemnie sprzężonych. Uzyskanie stabilnych i zbieżnych rozwiązań jest sprawą wieloletniego doświadczenia i doboru właściwych procedur i metod optymalizacji obliczeń.

W IMP PAN w Gdańsku opracowane zostały modele i programy komputerowe do analizy kinetostatycznej i dynamicznej maszyn wirnikowych bazujące na ogólnym algorytmie przedstawionym na rys. 1.2 i równaniu dynamiki (1.5)

[1.15]÷[1.18]. Tworzą one wzajemnie spójne środowisko o nazwie **MESWIR**, którego najistotniejszy element z uwagi na prowadzone tu rozważania stanowi zespół programów komputerowych o nazwie **NLDW** do analizy dynamiki złożonych układów typu linia wirników-konstrukcja podpierająca-łożyska **w zakresie nieliniowym** [1.25, 1.57]. Środowisko programowe MESWIR stanowi najnowsze i oryginalne osiągnięcie zespołu tworzącego Zakład Dynamiki Wirników i Łożysk Ślizgowych IMP PAN w Gdańsku. Zostanie ono szczegółowo zaprezentowane w rozdziale 3. niniejszej monografii.

Dla potrzeb niniejszego rozdziału ważne jest natomiast stwierdzenie, iż możliwość pozyskiwania w oparciu o programy serii NLDW nieeliptycznych trajektorii i złożonych widm drgań stwarza jakościowo nowe perspektywy badawcze w diagnostyce symulacyjnej maszyn wirnikowych. Postać równania (1.5) umożliwia nam wprowadzenie różnego rodzaju defektów w pracy obiektu jako danych wejściowych a wyniki obliczeń (wektory \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$) stanowiąc tu będą symptomy tych defektów – rys. 1.3. Możemy więc bezpośrednio zrealizować główną zasadę diagnostyki według modelu:

dane wejściowe = defekty
wyniki obliczeń = symptomy

czyli:

$$\boxed{\text{defekt}} \Rightarrow \boxed{\text{model}} \Rightarrow \boxed{\text{symptom}} . \quad (1.6)$$

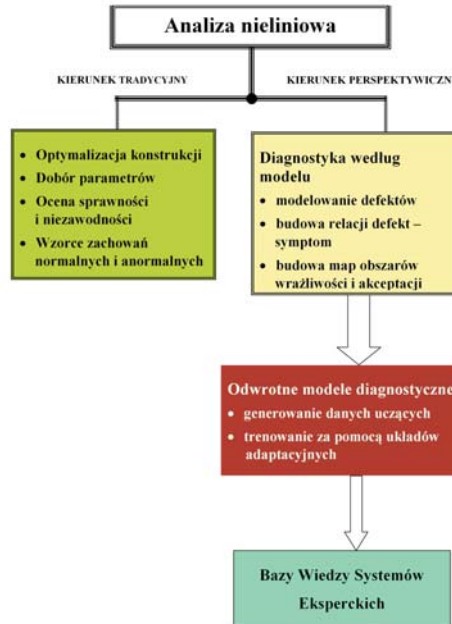
Łatwo zauważyć, iż ze względów praktycznych bardziej użyteczna byłaby informacja diagnostyczna, która dla znanego symptomu od razu określa defekt, czyli realizowana w takim przypadku winna być zasada odwrotna niż podana w związku (1.6). Oznacza to jednak konieczność odwrócenia modelu obiektu czyli

$$\boxed{\text{symptom}} \Rightarrow \boxed{\text{model odwrócony}} \Rightarrow \boxed{\text{defekt}} . \quad (1.7)$$

Model teoretyczny opisany równaniami (1.7), z uwagi na swą złożoność, a przede wszystkim nieliniowość, nie ma analitycznego odwzorowania odwrotnego. Stanowi to jeden z głównych problemów diagnostyki według modelu. Zasadę (1.7) zrealizować można jedynie stosując metody pośrednie, np. generując dane uczące według zasady (1.6), a następnie odwracając uzyskane relacje za pomocą trenowania sieci neuronalnych lub innych układów adaptacyjnych. Koncepcja taka przedstawiona została w pracy [1.23], a przede wszystkim w obszernym dziele stanowiącym podsumowanie prac kilkunastu zespołów badawczych z całego kraju w ramach Projektu Badawczego Zamawianego PBZ K015/T10/2001 [1.57].

Rysunki 1.5÷1.8 w sposób poglądowy przedstawiają zasadnicze problemy poruszane w tym rozdziale a mianowicie kwestie perspektywicznych zastosowań analizy nieliniowej, odwracania modeli diagnostycznych czy wreszcie ograniczeń i trudności związanych z praktyczną aplikacją diagnostyki według modelu.

Z powyższych rozważań wynika dość istotny wniosek, iż niezależnie od tego jaką zasadę diagnostyczną chcemy zrealizować (bezpośrednią czy odwrotną), to i tak w każdym przypadku rozwiązać musimy równanie w postaci (1.5), gdyż innej możliwości nie ma. Brak analitycznych modeli odwrotnych dla obiektów o



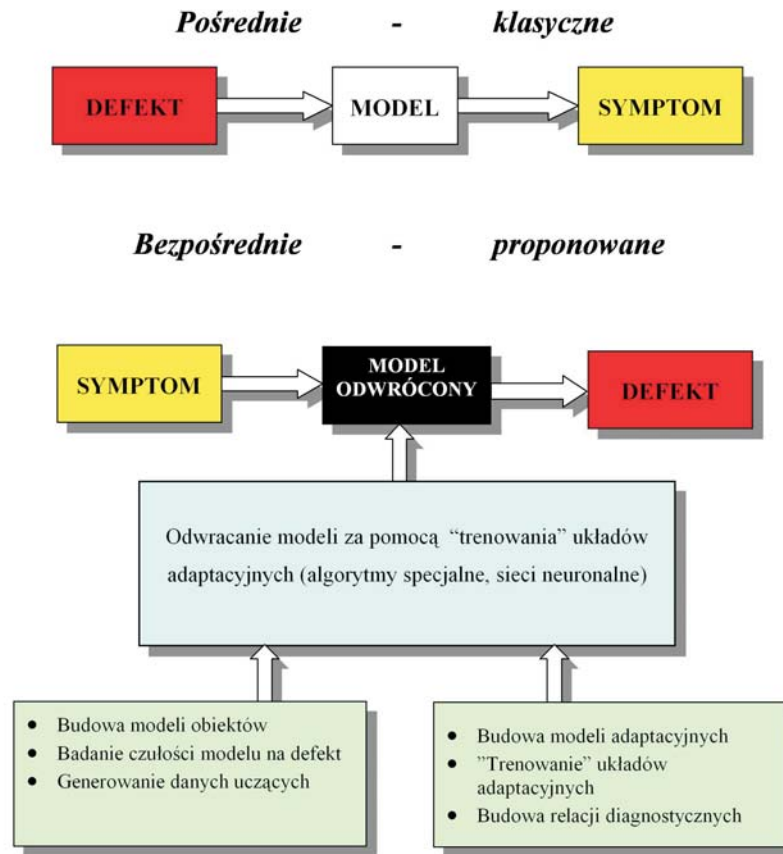
Rys. 1.5. Tradycyjne i perspektywiczne zastosowania analizy nieliniowej

strukturze nieliniowej i tym samym konieczność rozwiązywania równań ruchu w postaci (1.5) jest przyczyną m. in. wielu kłopotów z opisem własności konstrukcji podpierającej, pomimo, iż jest to jedyny podukład liniowy w rozpatrywanym obiekcie. Postać równania (1.5) narzuca bowiem konieczność podania charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych konstrukcji podpierającej, czyli podania współczynników mas związanych z konstrukcją podpierającą M_{mn} , współczynników tłumienia D_{mn} i sztywności C_{mn} (rys.1.1). Współczynniki te muszą być liczbami **rzeczywistymi** wprowadzonymi do równań ruchu całego układu, ponieważ są one tu traktowane jako realne wielkości fizyczne (nie możemy tu wprowadzać np. urojonych, zespolonych mas).

Tymczasem, z przyczyn praktycznych, o których powiemy szerzej w następnych rozdziałach, własności konstrukcji podpierającej wygodnie jest przedstawić w postaci **zespolonych** charakterystyk podatnościowych. Zachodzi zatem potrzeba dokonania stosownej transformacji tych charakterystyk. Problem jaki się wyłania sformułować można też w postaci

$$\boxed{\text{Zespolona dynamiczna podatność}} \xrightarrow{\text{Transformacja}} \boxed{\text{Rzeczywiste współczynniki mas, tłumienia i sztywności}}. \quad (1.8)$$

Okazuje się, iż realizacja przedstawionego wyżej schematu nie jest ani prosta, ani jednoznaczna pomimo liniowego charakteru związków typu siła–przemieszcze-



Rys. 1.6. Techniki pozyskiwania relacji diagnostycznych: klasyczne i za pomocą odwracania modeli

nie, który można przyjąć w odniesieniu do konstrukcji podpierającej.

Doszliliśmy w ten sposób do sprecyzowania głównego zagadnienia będącego przedmiotem niniejszego rozdziału, a więc zagadnienia transformacji charakterystyk dynamicznych konstrukcji podpierającej maszyny wirnikowej wyrażonej związkami (1.8).

Warto zauważyć, iż powyższy problem transformacji charakterystyk wynika przede wszystkim z faktu, iż własności maszyny wirnikowej chcemy opisać równaniami **nieliniowymi** postaci (1.5). Gdybyśmy założyli liniowy charakter wszystkich podukładów tworzących maszynę wirnikową (co się powszechnie zakłada w literaturze [1.26]÷[1.34]), to również równania opisujące tego rodzaju obiekt byłyby liniowe. Stosując znane założenia i podstawienia możliwa byłaby wówczas bezpośrednia integracja zespolonych charakterystyk konstrukcji podpierającej z

OGRANICZENIA DIAGNOSTYKI WEDŁUG MODELU

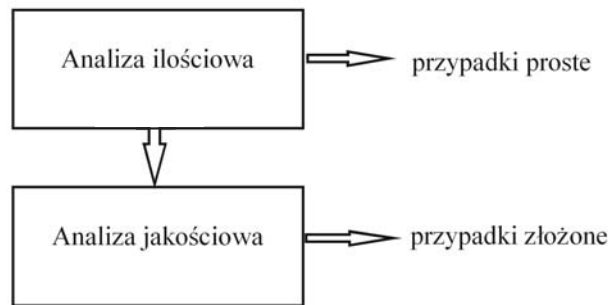
1. Trudności w zamodelowaniu zjawisk zachodzących w obiekcie

- kształt “gorącej” linii kinetostatycznej
- tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne
- sztywności i tłumienie dynamiczne podpór i fundamentu (wpływ podłoża)

2. Ograniczenia analizy komputerowej

- zbieżność metod numerycznych
- czas obliczeń i możliwości interpretacji wyników

3. Niejednoznaczność związków typu defekt - symptom

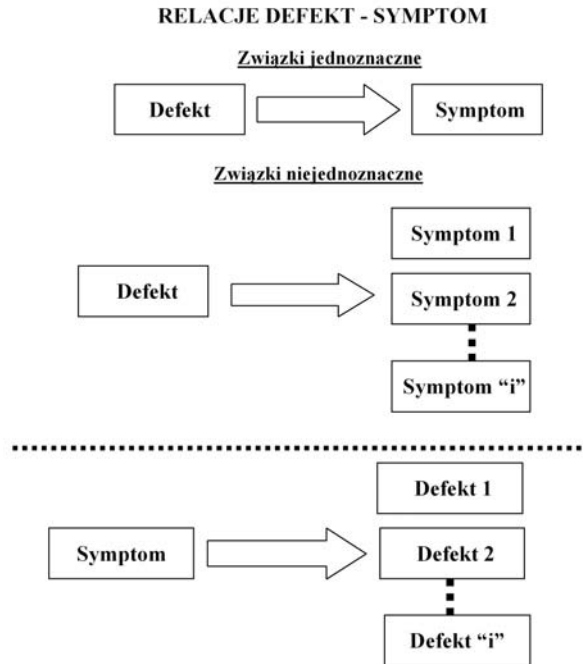


Rys. 1.7. Ograniczenia diagnostyki według modelu: analiza ilościowa i jakościowa

równaniami ruchu całego układu. Równania ruchu mogłyby przybrać elegancką formę jak np. w [1.4]

$$\begin{bmatrix} Z_{R,ii} & Z_{R,ib} & 0 \\ Z_{R,bi} & Z_{R,bb} + Z_B & -Z_B \\ 0 & -Z_B & Z_B + \bar{Z}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{R,i} \\ r_{R,b} \\ r_{F,b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.9)$$

gdzie \mathbf{Z} jest zespoloną macierzą sztywności dynamicznej, a indeksy b, i dotyczą stopni swobody łożysk i wewnętrznych wirnika, natomiast F, R, B odnoszą się do konstrukcji podpierającej, wirnika i łożysk odpowiednio. Wyraz r oznacza odpowiedź układu a f siły niewyważenia. Zauważmy, że sztywność dynamiczna konstrukcji podpierającej \bar{Z}_F jest teraz wyraźnie wydzielona, a jej powiązania z innymi podukładami doskonale widoczne. Ponadto \bar{Z}_F jest zespoloną sztywnością dynamiczną uzyskaną poprzez bezpośrednie odwrócenie zespolonej macierzy po-



Rys. 1.8. Niejednoznaczność związków typu defekt-symptom jako podstawowy problem diagnostyki według modelu

datności dynamicznej konstrukcji podpierającej. Bezpośrednia transformacja charakterystyk zespolonych do rzeczywistych jest w tym przypadku zbędna.

Niestety, w zagadnieniach nieliniowych tak elegancka i prosta reprezentacja równań ruchu jak w związku (1.9) nie jest możliwa.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na jeszcze jeden, niezwykle ważny, aspekt zagadnienia. Otóż istnienie w analizowanym układzie członów nieliniowych może wywołać tzw. **sprzężone formy drgań giętno-wzdłużno-skrętnych**. Jeżeli nawet założymy, że na układ działają jedynie siły właściwe dla jednej formy drgań (np. siły związane z niewyważeniem wirujących mas) a film olejowy poprzecznych łożysk ślizgowych nie jest w stanie przenosić obciążeń wzdłużnych i skrętnych (co ma miejsce w przypadku założenia pełnej równoległości osi panwi do osi wirnika), to i tak sprzężone formy drgań mogą być wywołane poprzez imperfekcje konstrukcyjne samego wirnika, czyli np. pęknięcia lub rozosiowania. Jak wynika to z aktualnie prowadzonych badań [1.50]÷[1.52] pęknięcia poprzeczne wirników mogą wywołać drgania wzdłużne układu tego samego rzędu co drgania poprzeczne. W takich sytuacjach analiza stanu dynamicznego wymaga zastosowania niekonwencjonalnych narzędzi badawczych takich jak skojarzona analiza tradycyjnych widm

amplitudowych z widmami fazowymi [1.50]. Stwarza to nowe, interesujące możliwości diagnostyki według modelu. Zagadnienia te jednak są na tyle złożone, iż warto im poświęcić więcej uwagi w kolejnych publikacjach.

Przedstawimy teraz podstawowe definicje, założenia i równania umożliwiające dokonanie transformacji wg związku (1.8), a następnie wskażemy na możliwe przypadki niejednoznaczności tej procedury.

1.3 Model konstrukcji podpierającej

Konstrukcja podpierająca współczesnej dużej maszyny wirnikowej składa się z stojaków łożyskowych (podpór) montowanych bezpośrednio na fundamencie lub w korpusie zewnętrznym maszyny oraz z żelazobetonowego fundamentu współdziałającego z gruntem poprzez sztucznie wytworzone podłoże. Trudności w trafnym przewidywaniu własności dynamicznych tak złożonych konstrukcji podpierających metodą analizy teoretycznej zmuszają do szerokiego stosowania metod doświadczalnych. Konstrukcje podpierające są z reguły bardzo sztywne, a naprężenia w nich są niewielkie. Z tego powodu ich własności dynamiczne można opisać za pomocą związków liniowych. Uzasadnia to stosowanie metody wzbudzeń harmonicznym w badaniach eksperymentalnych.

Oddziaływanie konstrukcji podpierającej na elastyczny wirnik opisać można za pomocą dyskretnych więzi, z których każda odbiera wirnikowi w miejscu jej zaczepienia jeden stopień swobody. Więzy te występują wszędzie tam, gdzie przenoszone są zmienne siły z wirnika na konstrukcję podpierającą, a więc w miejscach jego posadowienia, czyli utwierdzenia panwi łożyskowych. Interesować nas zatem będą charakterystyki dynamiczne konstrukcji podpierającej **wyłącznie** w miejscach utwierdzenia panwi.

Zakładając, iż film olejowy poprzecznych łożysk ślizgowych nie przenosi sił wzdłużnych, oraz że panwie łożyskowe mają skończoną szerokość (co umożliwia pominięcie kątów pochylenia osi panwi w stosunku do osi wirnika), to oddziaływanie konstrukcji podpierającej na wirnik w jednej podporze opisać można za pomocą dwóch więzi: poziomej i pionowej – tak jak to przedstawia rys. 1.9.

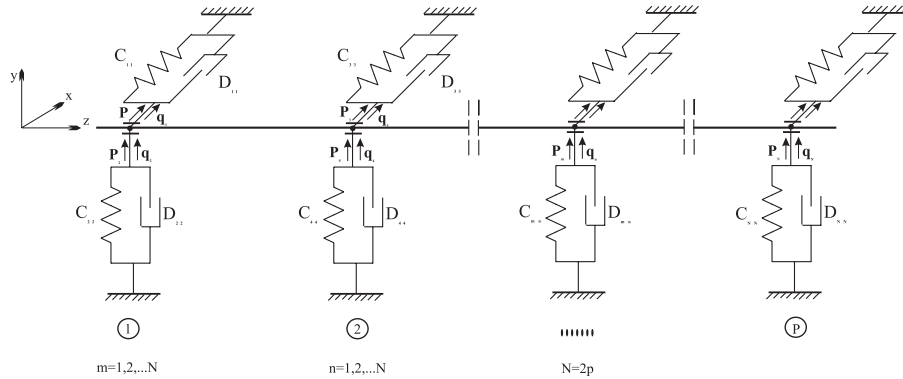
Jeżeli założymy, że układ posiada p podpór to wszystkie oddziaływania pomiędzy wirnikiem i konstrukcją nośną opisać można za pomocą $N = 2p$ więzi, które cechują liniowe (lub linearyzowane) związki pomiędzy siłami a przemieszczeniami.

Przyjmijmy następującą konwencję numeracji więzi:

podpora nr:	①	②	...	Ⓧ			
kierunek więzi:	x	y	x	y	...	x	y
numer więzi:	1	2	3	4	...	N-1	N

Własności dynamiczne konstrukcji podpierającej traktowane jako wyodrębniony podukład liniowy, w analogii do globalnych równań ruchu (1.5), możemy napisać w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (1.10)$$



Rys. 1.9. Więzi i oddziaływania w przyjętym modelu konstrukcji podpierającej

gdzie:

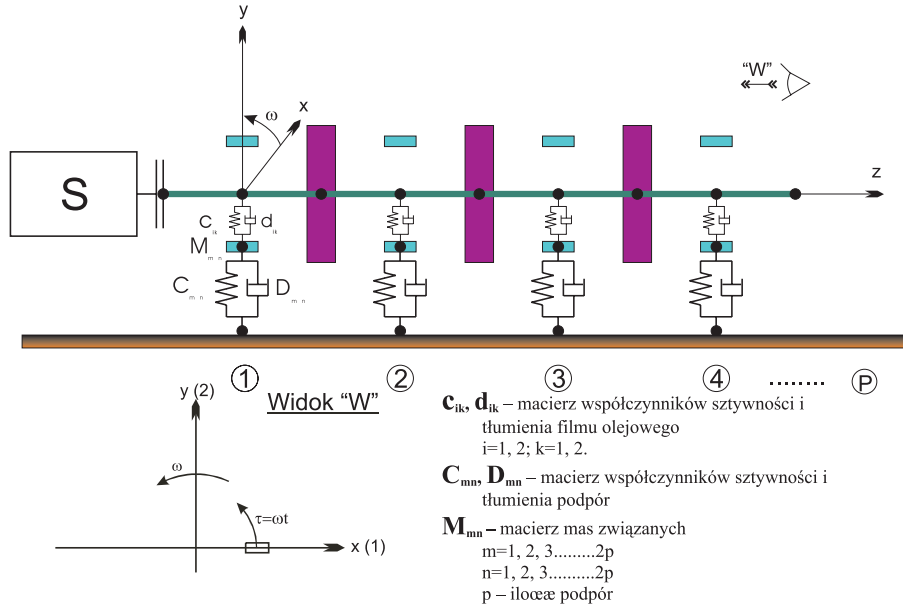
- $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{C}$ – rzeczywiste macierze bezwładności, tłumienia i sztywności;
- $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ – uogólnione, zespolone wektory przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń;
- \mathbf{P} – uogólniony, zespolony wektor sił wymuszających (harmonicznych).

Jeżeli równania ruchu (1.10) odniesiemy wyłącznie do zdefiniowanych wyżej więzi i ponadto jeżeli przyjmemy, że pierwszy indeks m oznacza numer więzi dla siła a drugi indeks n oznacza numer więzi dla przemieszczeń, to równanie (1.10) możemy napisać w postaci:

$$\mathbf{M}_{mn}\ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{D}_{mn}\dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{C}_{mn}\mathbf{q}_n = \mathbf{P}_m. \quad (1.11)$$

Oczywiście zachodzi: $m = 1, 2, \dots, N$ oraz $n = 1, 2, \dots, N$, co oznacza, iż macierze \mathbf{M}_{mn} , \mathbf{D}_{mn} , \mathbf{C}_{mn} są macierzami kwadratowymi o wymiarze $N \times N$. Zawierają one elementy M_{mn} , D_{mn} i C_{mn} zwane współczynnikami bezwładności (mas związanych), tłumienia i sztywności konstrukcji podpierającej – rys. 1.9. Współczynniki te dla $m = n$ określamy będziemy jako **główne** (punktowe) natomiast dla $m \neq n$ jako współczynniki **przeniesione**, przy czym jeśli przeniesienie dotyczy jednej podpory (np. C_{12} , C_{34} , ..., $C_{N-1,N}$), to współczynniki te określimy jako „skośne”, a jeśli dwóch różnych podpór (np. C_{13} , C_{14} , C_{24} , C_{35} , C_{36} , C_{1N} , itd.) to jako „sprzęgające”. Rysunek 1.10 przedstawia ogólną konwencję zapisu indeksów dla współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego c_{ik} , d_{ik} oraz konstrukcji podpierającej C_{mn} , D_{mn} , M_{mn} .

Warto w tym miejscu zaznaczyć, iż macierze mas związanych \mathbf{M}_{mn} , tłumienia \mathbf{D}_{mn} i sztywności \mathbf{C}_{mn} opisują fizyczne, rzeczywiste własności dynamiczne konstrukcji podpierającej w pewnym ściśle określonym przedziale częstotliwości wzbudzenia ω . **Określenie przedziału adekwatności charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych stanowi główny problem identyfikacji konstrukcji podpierającej.** Konstrukcja podpierająca, jako wydzielony podukład całego systemu, modelowana jest najczęściej w postaci układu dyskretnego o dużej

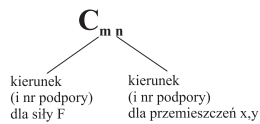


Definicja współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego

np.: $c_{11} = c_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ $c_{12} = c_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ $c_{21} = c_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ $c_{22} = c_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y}$

Definicja współczynników sztywności i tłumienia podpór (numeracja więzi)

Dla kierunku x:	1	3	5
Dla kierunku y:	2	4	6
	⏟	⏟	⏟	
	①	②	③	



np.: $C_{s2} = \frac{\partial F_s}{\partial x_2}$ oznacza współczynnik sztywności obliczony przy działaniu siły wymuszającej w kierunku poziomym (x) w podporze ③ i przemieszczeń pionowych (y) w podporze ①.

Rys. 1.10. Oznaczenia i konwencja zapisu indeksów współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego i więzi dla podpór

ilości stopni swobody, np. za pomocą metody MES. Tymczasem dla celów związanych z analizą własności dynamicznych linii wirników, łożysk i uszczelnień, czyli analizą całego systemu, potrzebne są informacje o konstrukcji podpierającej jedynie w miejscach posadowienia wirnika, czyli utwierdzenia panwi. Tak więc zachodzi konieczność identyfikacji konstrukcji podpierającej o wielu stopniach swobody na podstawie jedynie kilku lub kilkunastu stopni swobody w więziach bezpośrednio utwierdzających panwie łożyskowe. Sytuacja taka z natury rzeczy rodzić musi niejednoznaczne wyniki procedury identyfikacyjnej. Wyznaczone charakterystyki masowo-tłumiąco-sztywnościowe czyli macierze \mathbf{M}_{mn} , \mathbf{D}_{mn} i \mathbf{C}_{mn} obowiązywać będą jedynie w określonych przedziałach $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, $\langle \omega_2, \omega_3 \rangle$, ..., $\langle \omega_{r-1}, \omega_r \rangle$ z rozpatrywanego zakresu $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$. Przedziały te zależne są od własności dynamicznych konstrukcji podpierającej (ilości rezonansów, postaci modalnej drgań itd.) a ich określenie jest kwestią wycucia i doświadczenia a także dostępnych informacji (np. eksperymentalnych) o konstrukcji podpierającej. Sytuację dodatkowo komplikuje fakt, iż w rzeczywistych konstrukcjach dość często mamy do czynienia z nieproporcjonalnym tłumieniem materiałowym i konstrukcyjnym i nieliniową charakterystyką niektórych elementów konstrukcji podpierającej.

Współczynniki główne (punktowe) mas związanych w więziach M_{mn} i sztywności C_{mn} dla przyjętego liniowego modelu konstrukcji podpierającej nie mogą przyjmować wartości ujemnych czyli

$$M_{mn} > 0 \quad \text{i} \quad C_{mn} > 0 \quad \text{dla} \quad m = n.$$

Współczynnik tłumienia D_{mn} może natomiast przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Wielkość ta związana jest z procesem wymiany energii drgań i granicą stabilności układu. Ujemna wartość współczynnika tłumienia w więzi $D_{mn} < 0$ oznacza tłumienie drgań w stabilnych warunkach pracy i tym samym zmniejszenie energii drgań. Wartość dodatnia współczynnika $D_{mn} > 0$ oznacza możliwość pobudzania drgań poprzez dostarczanie do układu energii z zewnątrz (z układu napędowego). Sytuacja taka zachodzi po przekroczeniu granicy stabilności a więc w sytuacji kiedy powstają i rozwijają się już nieliniowe drgania samowzbudne. Znak współczynnika tłumienia D_{mn} zależy od przyjętej konwencji znaku fazy podatności Ψ_{mn} . Współczynnik D_{mn} jest parametrem matematycznym. Jego ujemna wartość oznacza pod względem fizycznym dodatnie tłumienie w układzie. Interpretacja taka jest dość powszechnie przyjmowana w literaturze.

Współczynniki C_{mn} i D_{mn} z równania (1.11) korespondują z globalnym równaniem ruchu całego obiektu (1.5) i mogą tu być wprowadzone w sposób bezpośredni. Należy je jednak wcześniej wyznaczyć, co zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami stanowić może pewien problem. Istotę problemu przedstawimy precyzując najpierw pojęcie dynamicznej sztywności i podatności konstrukcji podpierającej, a następnie opisując szczegóły związane z budową macierzy podatności na podstawie danych eksperymentalnych.

1.3.1 Dynamiczna sztywność i podatność. Definicje

W przypadku wzbudzenia harmonicznego, dla którego możemy przyjąć sinusoidalny przebieg sił wymuszających i przemieszczeń, całą szczególną równania niejednorodnego (1.10) możemy wyznaczyć stosując znane podstawienie

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 e^{j\omega t} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}_0 e^{j\omega t} \end{aligned} \right\}, \quad (1.12)$$

gdzie

- $\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0$ – amplitudy przemieszczeń i sił;
- $j = \sqrt{-1}$ – jednostka urojona;
- t – czas;
- ω – prędkość kątowna wirnika.

Wstawiając (1.12) do (1.10) otrzymamy

$$[\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D}] \mathbf{q}_0 = \mathbf{P}_0, \quad (1.13)$$

a więc układ równań algebraicznych równoważny równaniom różniczkowym (1.10). Wyrażenie

$$\boxed{\mathbf{K} = \frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{q}_0} = \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D}} \quad (1.14)$$

nosi nazwę zespolonej **macierzy sztywności dynamicznej** (*dynamic stiffness matrix* lub też *force influence coefficient matrix*) [1.1].

Zauważmy, iż sztywność dynamiczna konstrukcji podpierającej jest zawsze funkcją ω czyli zawsze zachodzi $\mathbf{K}(\omega)$, nawet jeśli same macierze \mathbf{C} , \mathbf{M} i \mathbf{D} od ω nie zależą (w pewnym przedziale).

Równanie (1.10) możemy też napisać w postaci (uwzględniając związek (1.14)):

$$\mathbf{K} \mathbf{q}_0 = \mathbf{P}_0. \quad (1.15)$$

Odnosząc równanie (1.15) do interesujących nas więzi – rys. 1.4, to zgodnie z przyjętą konwencją ich zapisu – rys. 1.5, otrzymamy

$$\mathbf{K}_{mn} \mathbf{q}_n^0 = \mathbf{P}_m^0. \quad (1.16)$$

Wektory \mathbf{q}_n^0 i \mathbf{P}_m^0 pozostają nadal zespolonymi amplitudami przemieszczeń w więziach n i wymuszeń w więziach m o następującej strukturze:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_n^0 &= \text{col} \{ \mathbf{q}_1^0, \mathbf{q}_2^0, \dots, \mathbf{q}_n^0 \} \quad \text{gdzie } n = 1, \dots, N \\ \mathbf{P}_n^0 &= \text{col} \{ \mathbf{P}_1^0, \mathbf{P}_2^0, \dots, \mathbf{P}_n^0 \} \quad \text{gdzie } m = 1, \dots, N \end{aligned} \right\}, \quad (1.17)$$

gdzie \mathbf{q}_n^0 i \mathbf{P}_m^0 to zespolone współrzędne tych wektorów – rys. 1.9.

Macierz sztywności dynamicznej \mathbf{K}_{mn} zawiera odpowiednio uporządkowane zespolone elementy k_{mn} o strukturze:

$$k_{mn} = C_{mn} - \omega^2 M_{mn} + j\omega D_{mn}, \quad (1.18)$$

gdzie M_{mn} , D_{mn} i C_{mn} to rzeczywiste współczynniki mas związanych, tłumienia i sztywności konstrukcji podpierającej – rys. 1.9.

Postać równania (1.16) narzuca następującą interpretację fizyczną poszczególnych elementów k_{mn} macierzy sztywności dynamicznej: element k_{mn} jest reakcją utrzymania bez przemieszczenia m -tej więzi układu dla zadanego przemieszczenia w więzi n przy zerowych przemieszczeniach we wszystkich innych więziach. Chcąc w ten sposób wyznaczyć pełną macierz K_{mn} musielibyśmy mierzyć siły w poszczególnych więziach unieruchamiając wiele punktów układu.

W praktyce zdecydowanie łatwiej jest pomierzyć przemieszczenia we wszystkich więziach dla wymuszenia działającego w jednej wybranej więzi. Oznacza to, że równanie (1.16) winno być napisane w „odwróconej” postaci

$$\mathbf{K}_{mn}^{-1} \mathbf{P}_m^0 = \mathbf{q}_n^0. \quad (1.19)$$

Macierz

$$\mathbf{L}_{mn} = \mathbf{K}_{mn}^{-1} = \frac{\mathbf{q}_n^0}{\mathbf{P}_m^0} = [\mathbf{C}_{mn} - \omega^2 \mathbf{M}_{mn} + j\omega \mathbf{D}_{mn}]^{-1} \quad (1.20)$$

nosi nazwę zespolonej **podatności dynamicznej** (*dynamic flexibility, dynamic receptance, dynamic compliance*) lub też **macierzy liczb wpływowych** (*displacement influence coefficient matrix*) [1.1]. Podobnie jak sztywność dynamiczna, podatność dynamiczna jest funkcją częstotliwości wzbudzenia ω , czyli zachodzi $\mathbf{L}(\omega)$. Stąd też macierz podatności \mathbf{L} nazywana jest również **funkcją odpowiedzi częstotliwościowej układu** (*frequency response functions – FRF*) [1.1].

Pomiar podatności konstrukcji podpierającej jest stosunkowo łatwy i stanowi obecnie rutynową procedurę badawczą.

Warto zauważyć, że np. macierz podatności układu dwupodporowego jest podmacierzą układu trójpodporowego, a trójpodporowego z kolei podmacierzą układu p -podporowego. Tego typu zależności nie zachodzą w przypadku macierzy sztywności dynamicznej. Fakt ten ma istotne znaczenie praktyczne.

Podatność dynamiczna i sztywność dynamiczna są wielkościami wzajemnie odwrotnymi. Oznacza to, iż dysponując macierzą podatności dynamicznej \mathbf{L}_{mn} (łatwą do uzyskania metodą badań eksperymentalnych) możemy wyznaczyć sztywność dynamiczną \mathbf{K}_{mn} potrzebną w równaniu (1.16) stosując rutynową procedurę odwracania macierzy:

$$\mathbf{K}_{mn} = \mathbf{L}_{mn}^{-1} \quad (1.21)$$

Już teraz widać, analizując postać związków (1.14) lub (1.20), że dysponując pomierzoną wartością podatności dynamicznej \mathbf{L}_{mn} i w konsekwencji macierzą sztywności \mathbf{K}_{mn} , jednoznacznie określenie rzeczywistych macierzy mas \mathbf{M}_{mn} , tłumienia – \mathbf{D}_{mn} i sztywności – \mathbf{C}_{mn} niezbędnych w globalnych równaniach ruchu (1.5), nie jest możliwe. Zmiennych do określenia jest tu bowiem więcej niż zależności funkcyjnych którymi dysponujemy.

Zanim przejdziemy do dalszych rozważań związanych z transformacją zespolonych charakterystyk podatnościowych do rzeczywistych, przedstawimy więcej

szczegółów dotyczących budowy macierzy podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej. Macierz ta w każdym przypadku stanowi punkt wyjścia do kolejnych zagadnień związanych z analizą własności konstrukcji podpierającej.

1.3.2 Ogólne zasady budowy zespolonej macierzy podatności dynamicznej

Nie zawężając ogólności rozważań możemy przyjąć, iż wektor sił wymuszających \mathbf{P}_m^0 określony związkami (1.17) posiada wyłącznie współrzędne rzeczywiste, co oznacza brak przesunięć fazowych w przypadku przykładania tych sił do kolejnych więzi. Założenie to jest powszechnie stosowane w badaniach eksperymentalnych konstrukcji podpierającej.

Równanie (1.19), uwzględniając definicję (1.20) możemy napisać w postaci:

$$\mathbf{L}_{mn}\mathbf{P}_m^0 = \mathbf{q}_n^0 \quad (1.22)$$

lub też

$$\mathbf{L}_{mn}\mathbf{P}_m = \mathbf{q}_n, \quad (1.23)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{P}_m^0 e^{j\omega t} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{q}_n = \mathbf{q}_n^0 e^{j\omega t}.$$

Efektami badań eksperymentalnych są rzeczywiste parametry ruchu w określonych więziach, a mianowicie amplitudy i kąty fazowe przemieszczeń harmonicznym. Parametry te możemy powiązać z zespolonym równaniem ruchu (1.23) rozpatrując tylko część rzeczywistą tego równania. Jeżeli l_{mn} oznacza zespolony element macierzy \mathbf{L}_{mn} to dla n -tego przemieszczenia możemy napisać stosując kolejne przekształcenia [1.1, 1.11]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[q_n^0 e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^N l_{mn} P_m^0 e^{j\omega t} \right] = \sum_{m=1}^N P_m^0 \operatorname{Re}[l_{mn} e^{j\omega t}] \\ &= A_{1n} \sin(\omega t) + A_{2n} \cos(\omega t) = A_n \sin(\omega t + \Psi_n), \end{aligned} \quad (1.24)$$

gdzie A_n i Ψ_n to rzeczywista amplituda i kąt fazowy przemieszczeń dla n -tej więzi.

Wobec powyższych przekształceń możemy teraz napisać

$$\operatorname{Re}[q_n e^{j\omega t}] = A_n e^{j(\omega t + \Psi_n)} = A_n e^{j\Psi_n} e^{j\omega t};$$

zatem:

$$\boxed{q_n^0 = A_n e^{j\Psi_n}}. \quad (1.25)$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób ważny związek pozwalający połączyć rzeczywiste parametry ruchu A_n , Ψ_n będące wynikiem pomiarów eksperymentalnych z zespoloną postacią elementów tworzących równanie (1.22) i stanowiących bazę do wyprowadzenia dynamicznej macierzy podatności \mathbf{L}_{mn} .

Założmy teraz, że w jednej więzi „m” działa siła wymuszająca sinusoidalnie zmienna o częstotliwości ω

$$P_m = P_m^0 \sin(\omega t). \quad (1.26)$$

Macierz kolumnowa (1.17) będzie miała zatem wszystkie składowe zerowe z wyjątkiem jednej, którą jest liczba rzeczywista

$$\mathbf{P}_m^0 = \text{col} \{0, 0, \dots, P_m^0, 0, \dots, 0\}. \quad (1.27)$$

Postać wektora (1.27) z jednym niezerowym czynnikiem uwidacznia sensowność przyjęcia założenia, iż siła wymuszająca P_m nie jest przesunięta w fazie i ma postać (1.26).

Przyłożona w jednej, konkretnej więzi m sinusoidalnie zmienna siła wzbudzająca P_m powoduje rzeczywiste przemieszczenia we wszystkich pozostałych więziach. Przemieszczenia te stanowią oczywiście odpowiedź układu na zadane wymuszenia i wyrażają się w postaci następujących pomierzonych amplitud i kątów fazowych:

$$u_{mn} = A_{mn} \sin(\omega t + \Psi_{mn}), \quad (1.28)$$

gdzie $n = 1, 2, \dots, N$.

Uwzględniając zw. (1.25) wektor uogólnionych amplitud, dla wymuszenia działającego w więzi m , przyjmie postać

$$\mathbf{q}_n^0 = \{A_{m1}e^{j\Psi_{m1}}, A_{m2}e^{j\Psi_{m2}}, \dots, A_{mn}e^{j\Psi_{mn}}, A_{mN}e^{j\Psi_{mN}}\}. \quad (1.29)$$

Uwzględniając (1.27) i (1.29) równanie (1.22) możemy napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{m1} & \dots & l_{N1} \\ l_{12} & l_{22} & \dots & l_{m2} & \dots & l_{N2} \\ & & \dots & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ l_{1n} & l_{2n} & \dots & l_{mn} & \dots & l_{Nn} \\ & & & & & \\ l_{1N} & l_{2N} & \dots & l_{mN} & \dots & l_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P_m^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{m1}e^{j\Psi_{m1}} \\ A_{m2}e^{j\Psi_{m2}} \\ \vdots \\ A_{mn}e^{j\Psi_{mn}} \\ \vdots \\ A_{mN}e^{j\Psi_{mN}} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

↑ m -ta kolumna

W takim przypadku m -ta kolumna macierzy podatności \mathbf{L}_{mn} może być wyznaczona z zależności

$$\begin{bmatrix} l_{m1} \\ l_{m2} \\ \vdots \\ l_{mn} \\ \vdots \\ l_{mN} \end{bmatrix} = \frac{1}{P_m^0} \begin{bmatrix} A_{m1}e^{j\Psi_{m1}} \\ A_{m2}e^{j\Psi_{m2}} \\ \vdots \\ A_{mn}e^{j\Psi_{mn}} \\ \vdots \\ A_{mN}e^{j\Psi_{mN}} \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

W analogiczny sposób obliczamy pozostałe kolumny przykładając siłę wymuszającą P_m^0 w kolejnych więziach m i otrzymując nowe wartości przemieszczeń (1.28) w wszystkich więziach.

Procedura ta umożliwia budowę pełnej, zespolonej dynamicznej macierzy podatności \mathbf{L}_{mn} dysponując jedynie rzeczywistymi, pomierzonymi amplitudami wymuszeń P_m^0 oraz amplitudami przemieszczeń A_{mn} i kątów fazowych Ψ_{mn} .

Z zależności (1.30) i (1.31) widać, iż każdy element l_{mn} macierzy podatności dynamicznej ma postać:

$$l_{mn} = \frac{A_{mn}}{P_m^0} e^{j\Psi_{mn}} = |l_{mn}| e^{j\Psi_{mn}} \quad (1.32)$$

lub też

$$l_{mn} = \frac{A_{mn}}{P_m^0} (\cos \Psi_{mn} + j \sin \Psi_{mn}) = l_{mn}^* + j l_{mn}^{**}. \quad (1.33)$$

Przedstawiony w rów. (1.32) stosunek amplitud:

$$|l_{mn}| = \frac{A_{mn}}{P_m^0}$$

nosi nazwę **modułu zespolonej podatności** a kąt Ψ_{mn} **fazy podatności**. Postać ta jest wygodna z uwagi na interpretację fizyczną i graficzną, natomiast postać (1.33) jest stosowana w obliczeniach numerycznych (np. przy numerycznym odwracaniu).

Macierz podatności \mathbf{L}_{mn} musi być odwracalna, co oznacza, iż drogą badań eksperymentalnych wyznaczyć musimy **wszystkie** jej elementy (wzbudzenie musi być przykładane kolejno do wszystkich więzi). Macierz podatności \mathbf{L}_{mn} dla liniowych układów mechanicznych jest macierzą symetryczną.

Opisana wyżej procedura budowy zespolonej macierzy podatności dynamicznej odnosi się rzecz jasna do jednej konkretnej częstości wzbudzenia ω . Powtarzając całą procedurę postępowania dla kolejnych częstości ω otrzymamy stabelizowane funkcje macierzy $\mathbf{L}(\omega)$ i pełny obraz zachowań dynamicznych konstrukcji podpierającej.

1.3.3 Przykład budowy macierzy podatności dynamicznej dla konstrukcji dwupodporowej

Załóżmy, iż konstrukcja podpierająca składa się tylko z dwóch podpór czyli $p = 2$, co oznacza liczbę więzi $N = 2p = 4$. Macierz podatności \mathbf{L}_{mn} będzie miała wymiar 4×4 i zawierać będzie 16 elementów.

Załóżmy, iż siła wymuszająca $P_m = P_m^0 \sin \omega t$ została przyłożona do pierwszej podpory w kierunku poziomym x czyli do więzi nr 1. Wtedy jest

$$P_1 = P_1^0 \sin \omega t.$$

Siła P_1 powoduje przemieszczenia poziome i pionowe zarówno w podporze pierwszej jak i drugiej a więc we wszystkich więziach układu – rys. 1.4, czyli otrzymamy:

$$u_{11} = A_{11} \sin(\omega t + \Psi_{11}),$$

$$u_{12} = A_{12} \sin(\omega t + \Psi_{12}),$$

$$u_{13} = A_{13} \sin(\omega t + \Psi_{13}),$$

$$u_{14} = A_{14} \sin(\omega t + \Psi_{14}).$$

Równanie (1.30) możemy teraz napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & l_{43} \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}e^{j\Psi_{11}} \\ A_{12}e^{j\Psi_{12}} \\ A_{13}e^{j\Psi_{13}} \\ A_{14}e^{j\Psi_{14}} \end{bmatrix}.$$

Wykonując mnożenie otrzymamy:

$$\begin{aligned} l_{11}P_1^0 + l_{21}0 + l_{31}0 + l_{41}0 &= A_{11}e^{j\Psi_{11}}, \\ l_{12}P_1^0 + 0 + 0 + 0 &= A_{12}e^{j\Psi_{12}}, \\ l_{13}P_1^0 + 0 + 0 + 0 &= A_{13}e^{j\Psi_{13}}, \\ l_{14}P_1^0 + 0 + 0 + 0 &= A_{14}e^{j\Psi_{14}}. \end{aligned}$$

co określa nam pierwszą kolumnę macierzy \mathbf{L}

$$\begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \\ l_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{P_1^0} e^{j\Psi_{11}} \\ \frac{A_{12}}{P_1^0} e^{j\Psi_{12}} \\ \frac{A_{13}}{P_1^0} e^{j\Psi_{13}} \\ \frac{A_{14}}{P_1^0} e^{j\Psi_{14}} \end{bmatrix}.$$

Przykładając teraz siłę P_m do drugiej więzi

$$P_2 = P_2^0 \sin\omega t$$

otrzymamy nowy zestaw parametrów charakterystyk odpowiedzi układu

$$\begin{aligned} u_{21} &= A_{21} \sin(\omega t + \Psi_{21}), \\ u_{22} &= A_{22} \sin(\omega t + \Psi_{22}), \\ u_{23} &= A_{23} \sin(\omega t + \Psi_{23}), \\ u_{24} &= A_{24} \sin(\omega t + \Psi_{24}). \end{aligned}$$

i w konsekwencji drugą kolumnę macierzy podatności

$$\begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{22} \\ l_{23} \\ l_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{21}}{P_2^0} e^{j\Psi_{21}} \\ \frac{A_{22}}{P_2^0} e^{j\Psi_{22}} \\ \frac{A_{23}}{P_2^0} e^{j\Psi_{23}} \\ \frac{A_{24}}{P_2^0} e^{j\Psi_{24}} \end{bmatrix}.$$

Przykładając siłę P_m w kolejnych więziach, czyli

$$P_3 = P_3^0 \sin\omega t \quad \text{i} \quad P_4 = P_4^0 \sin\omega t$$

otrzymamy kolejne odpowiedzi układu i w konsekwencji pełną zespoloną macierz podatności dla konkretnego wymuszenia ω .

$$L_{mn}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{P_1^0} e^{j\Psi_{11}} & \frac{A_{21}}{P_2^0} e^{j\Psi_{21}} & \frac{A_{31}}{P_3^0} e^{j\Psi_{31}} & \frac{A_{41}}{P_4^0} e^{j\Psi_{41}} \\ \frac{A_{12}}{P_1^0} e^{j\Psi_{12}} & \frac{A_{22}}{P_2^0} e^{j\Psi_{22}} & \frac{A_{32}}{P_3^0} e^{j\Psi_{32}} & \frac{A_{42}}{P_4^0} e^{j\Psi_{42}} \\ \frac{A_{13}}{P_1^0} e^{j\Psi_{13}} & \frac{A_{23}}{P_2^0} e^{j\Psi_{23}} & \frac{A_{33}}{P_3^0} e^{j\Psi_{33}} & \frac{A_{43}}{P_4^0} e^{j\Psi_{43}} \\ \frac{A_{14}}{P_1^0} e^{j\Psi_{14}} & \frac{A_{24}}{P_2^0} e^{j\Psi_{24}} & \frac{A_{34}}{P_3^0} e^{j\Psi_{34}} & \frac{A_{44}}{P_4^0} e^{j\Psi_{44}} \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

1.4 Transformacja charakterystyk

Przejdźmy teraz do zagadnień związanych z transformacją zespolonych charakterystyk podatnościowych konstrukcji podpierającej do rzeczywistych charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych. Problem ten symbolicznie wyraża związek (1.8).

Punktem wyjścia do naszych dalszych rozważań będzie oczywiście macierz podatności dynamicznej \mathbf{L}_{mn} uzyskana drogą pomiarów eksperymentalnych (lub stosownej symulacji komputerowej). Możemy teraz z łatwością, stosując rutynowe procedury numeryczne, odwrócić macierz \mathbf{L}_{mn} otrzymując w ten sposób zespoloną macierz sztywności dynamicznej

$$\mathbf{K}_{mn} = \mathbf{L}_{mn}^{-1}. \quad (1.35)$$

W efekcie odwrócenia część rzeczywista i urojona każdego elementu macierzy sztywności jest nam znana czyli znamy:

$$\operatorname{Re}(k_{mn}) \text{ oraz } \operatorname{Im}(k_{mn}).$$

Możemy też w równie prosty sposób wyznaczyć moduły i kąty fazowe elementów macierzy sztywności:

$$|k_{mn}| = \sqrt{\operatorname{Re}(k_{mn})^2 + \operatorname{Im}(k_{mn})^2} \quad (1.36)$$

oraz

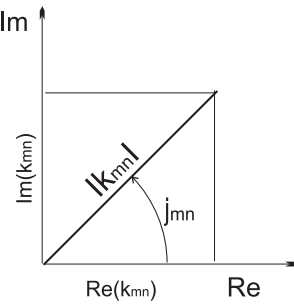
$$\varphi_{mn} = \arctg \left[\frac{\operatorname{Im}(k_{mn})}{\operatorname{Re}(k_{mn})} \right] \quad (1.37)$$

lub lepiej za pomocą funkcji sinus lub cosinus (nie ma wówczas konieczności sprawdzania znaku funkcji)

$$\varphi_{mn} = \arcsin \left[\frac{\operatorname{Im}(k_{mn})}{|k_{mn}|} \right] \quad \text{lub} \quad \varphi_{mn} = \arccos \left[\frac{\operatorname{Re}(k_{mn})}{|k_{mn}|} \right].$$

Warto zauważyć, iż otrzymane wyżej moduły i kąty fazowe φ_{mn} są inne niż moduły i kąty fazowe Ψ_{mn} w zw. (1.32, 1.33).

Zachodzą tu oczywiste zależności



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(k_{mn}) &= |k_{mn}| \cos \varphi_{mn} \\ \operatorname{Im}(k_{mn}) &= |k_{mn}| \sin \varphi_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Zauważmy, iż moduł sztywności $|k_{mn}|$ i faza φ_{mn} nie mają tak jednoznacznej interpretacji fizycznej jak moduł podatności $|l_{mn}|$ i faza podatności Ψ_{mn} . Moduł podatności, zgodnie z wyprowadzonymi z związku (1.32), zawsze będzie stosunkiem amplitud przemieszczeń i sił wzbudzających konstrukcję podpierającą a faza Ψ_{mn} kątem opóźnienia pomiędzy wymuszeniem i odpowiedzią układu w każdej więzi, czyli

$$|l_{mn}| = \frac{A_{mn}}{P_m^0}.$$

Jeżeli mamy do czynienia ze sprzężonym wpływem jednej podpory na pozostałe, czyli jeśli macierz podatności \mathbf{L}_{mn} jest macierzą pełną lub też zawiera elementy poza główną przekątną, to analogiczny, odwrotny związek niestety nie zachodzi w przypadku modułu sztywności, czyli

$$|k_{mn}| \neq \frac{P_m^0}{A_{mn}}.$$

Jedynie w przypadku układów w pełni rozsprężonych czyli braku wzajemnych oddziaływań skośnych i sprzęgających w więziach, co oznacza istnienie wyłącznie współczynników głównych $l_{11}, l_{22}, l_{33}, \dots, l_{NN}$, możemy napisać, iż zachodzi w pełni odwrotna zależność stosunków amplitud z głównej przekątnej macierzy podatności i sztywności, czyli

$$|l_{mn}| = \frac{A_{mn}}{P_m^0} \quad \text{natomiast} \quad |k_{mn}| = \frac{P_m^0}{A_{mn}},$$

gdzie $m = n = 1, 2, 3, \dots, N$.

Taki przypadek w praktyce zachodzi jednak niezbyt często. Z tego względu pojęcie modułu i fazy sztywności wykorzystywane jest w badaniach eksperymentalnych konstrukcji podpierającej znacznie rzadziej niż te same pojęcia w odniesieniu do podatności dynamicznej.

Dalszy tok postępowania zależy będzie od tego czy dysponujemy macierzą podatności dynamicznej \mathbf{L}_{mn} pomierzoną tylko dla jednej częstotliwości wzbudzenia

ω_1 , czy też dysponujemy charakterystykami podatnościowymi dla dwóch lub więcej częstotliwości wzbudzenia $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ czyli:

$$\mathbf{L}_{mn}(\omega_1), \mathbf{L}_{mn}(\omega_2), \dots, \mathbf{L}_{mn}(\omega_r)$$

a w konsekwencji uwzględniając (1.35) i (1.38)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_1)], \operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_2)], \dots, \operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_r)] \\ & \operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_1)], \operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_2)], \dots, \operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_r)]. \end{aligned}$$

1.4.1 Transformacja przy jednej częstotliwości wzbudzenia ω_1

Punktem wyjścia jest w tym przypadku znana charakterystyka podatnościowa układu $\mathbf{L}_{mn}(\omega_1)$. Poprzez odwrócenie macierzy $\mathbf{L}_{mn}(\omega_1)$ otrzymamy w efekcie macierz sztywności $\mathbf{K}_{mn}(\omega_1)$ co oznacza, iż znamy część rzeczywistą i urojoną każdego elementu tej macierzy, a więc mamy do dyspozycji: $\operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_1)]$ oraz $\operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_1)]$.

Zauważmy, iż z jednej strony części rzeczywiste i urojone poszczególnych elementów macierzy sztywności opisują zw. (1.38), a z drugiej strony zw. (1.18) wyprowadzone z definicji dynamicznej macierzy sztywności. Poprzez porównanie otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} C_{mn} - \omega_1^2 M_{mn} &= |k_{mn}| \cos \varphi_{mn} = \operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_1)] \\ \omega_1 D_{mn} &= |k_{mn}| \sin \varphi_{mn} = \operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_1)] \end{aligned} \right\}. \quad (1.39)$$

Powyższy układ dwóch równań zawiera trzy poszukiwane rzeczywiste wielkości a mianowicie M_{mn} , D_{mn} i C_{mn} i pomimo, iż drugie równanie wyznacza jednoznacznie tłumienie D_{mn} w więzi, to nadal nie możemy jednoznacznie określić współczynników rozkładu mas związanych M_{mn} i sztywności C_{mn} .

Wprowadźmy teraz pojęcie tzw. **sztywności równoważnej** R_{mn} rozumianej jako część rzeczywista elementu k_{mn} czyli

$$R_{mn} = C_{mn} - \omega_1^2 M_{mn}. \quad (1.40)$$

Termin „sztywność równoważna” zaproponował Gerlach w [1.12, 1.13]. Uwzględniając (1.40) w równaniach (1.39) możemy napisać:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{mn} &= |k_{mn}| \cos \varphi_{mn} \\ D_{mn} &= \frac{1}{\omega_1} |k_{mn}| \sin \varphi_{mn} \end{aligned}}, \quad (1.41)$$

gdzie moduł $|k_{mn}|$ i fazę φ_{mn} określamy według zw. (1.36) i (1.37) znając uprzednio części rzeczywiste i urojone poszczególnych elementów macierzy sztywności $\operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_1)]$ i $\operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_1)]$. Stosując powyższą procedurę do wszystkich pozostałych elementów macierzy sztywności otrzymamy w efekcie macierz sztywności równoważnej \mathbf{R}_{mn} i macierz tłumienia \mathbf{D}_{mn} . Macierze \mathbf{R}_{mn} i \mathbf{D}_{mn} są macierzami rzeczywistymi.

Tak więc procedura transformacji zespolonych charakterystyk podatnościowych do charakterystyk rzeczywistych określona działaniami wg zw. (1.35), (1.36), (1.37), (1.41), dla przypadku wzbudzenia układu jedną tylko częstotliwością ω_1 , pozwala na jednoznaczne wyznaczenie jedynie sztywności równoważnej \mathbf{R}_{mn} i tłumienia \mathbf{D}_{mn} . Niestety sztywności równoważnej \mathbf{R}_{mn} nie możemy bezpośrednio wprowadzić do globalnych nieliniowych równań ruchu (1.5) i tym samym do programów komputerowych serii NLDW. Nadal konieczne pozostaje określenie macierzy mas związanych (bezwładności) \mathbf{M}_{mn} i sztywności \mathbf{C}_{mn} . Sztywność równoważna R_{mn} w danej więzi związana jest z współczynnikiem mas M_{mn} i sztywności C_{mn} następującą zależnością (patrz zw. (1.39) i (1.41))

$$R_{mn} = C_{mn} - \omega_1^2 M_{mn} . \quad (1.42)$$

Teoretycznie zatem, dla danej wartości R_{mn} i ω_1 , dowolna kombinacja wartości współczynników C_{mn} i M_{mn} spełniająca równość (1.42) winna w tym samym stopniu spełniać warunki formalne i odwzorowywać własności konstrukcji podpierającej w globalnych równaniach ruchu (1.5). Musimy tu jednak nałożyć dodatkowe dwa warunki, które wynikają z fizyki zjawiska a mianowicie: rzeczywiste masy związane i sztywności w więziach nie mogą być ujemne, czyli

$$M_{mn} > 0 \text{ i } C_{mn} > 0 . \quad (1.43)$$

Spełniając równanie (1.42) i warunki (1.43) pozostają nam zatem dwie możliwości [1.14]:

1. przyjęcie dowolnej wartości M_{mn} spełniającej nierówność:

$$M_{mn} > -R_{mn}/\omega_1^2 \quad (44a)$$

i obliczenie C_{mn} z relacji

$$C_{mn} = R_{mn} + \omega_1^2 M_{mn} ; \quad (44b)$$

2. przyjęcie dowolnej wartości C_{mn} spełniającej nierówność

$$C_{mn} > R_{mn} \quad (45a)$$

i obliczenie M_{mn} z zależności:

$$M_{mn} = (C_{mn} - R_{mn})/\omega_1^2 . \quad (45b)$$

Każda para C_{mn} i M_{mn} o jednakowych indeksach związana zależnością (1.42) i warunkami (1.43) oraz D_{mn} określona zw. (1.41) spełnia pod względem fizycznym ogólne równania dynamiki konstrukcji podpierającej (1.11) dla danej częstotliwości wzbudzenia ω_1 .

W praktyce jednak może się zdarzyć iż np. zbyt duże wartości mas związanych w macierzy \mathbf{M}_{mn} przy wielokrotnym ich wymnażaniu w procesie obliczeń numerycznych mogą generować błędy. Ponadto rozsądnie jest przyjąć jednakowe

wartości mas dla podpór o tej samej konstrukcji w przyjętym zakresie wartości wzbudzenia. Masy te winny odpowiadać chociażby w przybliżeniu masom podpór i części fundamentu biorącym faktycznie udział w procesie wymiany energii w trakcie drgań. Jeśli uda się takie masy oszacować, które jednocześnie spełniają warunki (44a), to do dalszych rozważań można je przyjąć jako optymalne. Nie zawsze jednak tego rodzaju szacunki są możliwe z uwagi na bardzo złożoną konstrukcję podpór i fundamentu w większości maszyn wirnikowych, zwłaszcza dużej mocy.

W każdym jednak przypadku dobór rzeczywistych wartości mas związanych M_{mn} i sztywności C_{mn} w poszczególnych więziach nie jest jednoznaczny o ile dysponujemy jedną tylko macierzą podatności $\mathbf{L}_{mn}(\omega_1)$. Transformacja charakterystyk zespolonych do rzeczywistych w tego typu przypadkach, pomimo, iż jest ona poprawna pod względem matematycznym, w praktyce może być zawodna.

1.4.2 Transformacja dla dwóch częstości wzbudzenia ω_1 i ω_2

Załóżmy, że wyznaczone wg przedstawionego powyżej algorytmu macierze podatności dynamicznej $\mathbf{L}_{mn}(\omega_1)$ i $\mathbf{L}_{mn}(\omega_2)$ znajdują się w liniowym zakresie widma częstotliwości przyjętej konstrukcji podpierającej. W praktyce może to oznaczać niewiele różniące się od siebie częstości ω_1 i ω_2 i tym samym ograniczony przedział adekwatności wyprowadzonych związków. Algorytm przejścia od charakterystyk podatnościowych do charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych jest w tego przypadkach następujący [1.1, 1.3, 1.10]:

1. Odwrócenie macierzy podatności $\mathbf{L}_{mn}(\omega_1)$ i $\mathbf{L}_{mn}(\omega_2)$ w efekcie czego otrzymujemy zespolone macierze sztywności dynamicznej $\mathbf{K}_{mn}(\omega_1)$ i $\mathbf{K}_{mn}(\omega_2)$. Każdy element tych macierzy ma swoją część rzeczywistą $\text{Re}[k_{mn}(\omega_1)]$, $\text{Re}[k_{mn}(\omega_2)]$ i urojoną $\text{Im}[k_{mn}(\omega_1)]$ i $\text{Im}[k_{mn}(\omega_2)]$.
2. Poszukiwane elementy macierzy \mathbf{M}_{mn} , \mathbf{D}_{mn} , \mathbf{C}_{mn} wyznaczamy z zależności typu (1.39):

$$\begin{aligned} C_{mn} - \omega_1^2 M_{mn} &= \text{Re}[k_{mn}(\omega_1)] \\ C_{mn} - \omega_2^2 M_{mn} &= \text{Re}[k_{mn}(\omega_2)] . \end{aligned}$$

Mamy więc dwa równania i dwie niewiadome, a zatem:

$$\left. \begin{aligned} M_{mn} &= \frac{\text{Re}[k_{mn}(\omega_1)] - \text{Re}[k_{mn}(\omega_2)]}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ C_{mn} &= \text{Re}[k_{mn}(\omega_1)] + \omega_1^2 M_{mn} \\ &\text{lub} \\ C_{mn} &= \text{Re}[k_{mn}(\omega_2)] + \omega_2^2 M_{mn} \\ &\text{oraz} \\ D_{mn} &= \frac{\text{Im}[k_{mn}(\omega_1)]}{\omega_1} \\ &\text{lub} \\ D_{mn} &= \frac{\text{Im}[k_{mn}(\omega_2)]}{\omega_2} \end{aligned} \right\} . \quad (1.46)$$

Związek (1.46) pozwalają nam już na **jednoznaczne** określenie mas związanych M_{mn} , sztywności C_{mn} i tłumienia D_{mn} we wszystkich więziach układu. Warto zwrócić uwagę, iż w przyjętym przedziale częstości wzbudzenia układu $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ wyznaczone wartości M_{mn} , C_{mn} i D_{mn} są stałe (niezależne od ω).

Problem jaki się tu może wyłonić związany jest z doбором właściwego przedziału częstości ω_1 i ω_2 . Nie zawsze można wyodrębnić liniowe odcinki z złożonego na ogół widma częstotliwościowego konstrukcji podpierającej. Często też zdarza się tak, iż dysponujemy dwiema charakterystykami $\mathbf{L}_{mn}(\omega_1)$ i $\mathbf{L}_{mn}(\omega_2)$ ale uzyskanymi dla częstości ω_1 i ω_2 zbyt odległych od siebie. Przedział $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ zawierać może jeden lub kilka nawet rezonansów, co praktycznie uniemożliwia stosowanie procedury transformacji wg zależności (1.46).

1.4.3 Transformacja dla wielu częstości wzbudzenia

Załóżmy, iż dysponujemy r charakterystykami podatnościowymi $\mathbf{L}_{mn}(\omega_1)$, $\mathbf{L}_{mn}(\omega_2)$, ..., $\mathbf{L}_{mn}(\omega_r)$ konstrukcji podpierającej uzyskanymi dla wartości wzbudzenia z przedziału $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$. W tego rodzaju przypadkach możliwe są co najmniej dwa podejścia do zagadnienia transformacji charakterystyk.

1.4.3.1 Podział przedziału

Przedział $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$ dzielimy na $r - 1$ odcinków $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, $\langle \omega_2, \omega_3 \rangle$, ..., $\langle \omega_{r-1}, \omega_r \rangle$ i wyznaczamy wartości współczynników M_{mn} , D_{mn} i C_{mn} dla każdego odcinka według procedury dla dwóch częstości wzbudzenia, czyli wg zależności (1.46). Otrzymamy w efekcie $r - 1$ macierzy \mathbf{M}_{mn} , \mathbf{C}_{mn} i \mathbf{D}_{mn} adekwatnych dla określonego przedziału częstości wzbudzenia.

Powyższa metoda jest najczęściej stosowana w praktyce [1.4]. Skuteczność identyfikacji rzeczywistych charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych konstrukcji podpierającej zależy tu w głównej mierze od trafności doboru przedziałów częstości wzbudzenia. Niemniej jednak, metoda ta, jak wynika z danych literaturowych, daje najlepsze wyniki.

1.4.3.2 Budowa równania regresji

Odwracając macierze podatności otrzymamy następujące zespolone macierze sztywności dynamicznej $\mathbf{K}_{mn}(\omega_1)$, $\mathbf{K}_{mn}(\omega_2)$, ..., $\mathbf{K}_{mn}(\omega_r)$. Znamy zatem części rzeczywiste i urojone każdego elementu tych macierzy:

$$\operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_1)], \operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_2)], \dots, \operatorname{Re}[k_{mn}(\omega_r)],$$

$$\operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_1)], \operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_2)], \dots, \operatorname{Im}[k_{mn}(\omega_r)].$$

Tym samym znamy moduły sztywności każdego elementu określone zw. (1.36) czyli znamy: $|k_{mn}(\omega_1)|$, $|k_{mn}(\omega_2)|$, ..., $|k_{mn}(\omega_r)|$.

Uwzględniając zw. (1.38) lub też zw. (1.39) dla każdej częstotliwości wzbudzenia ω z przedziału $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$ możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} C_{mn} - \omega^2 M_{mn} &= |k_{mn}| \cos \varphi_{mn} \\ \omega D_{mn} &= |k_{mn}| \sin \varphi_{mn} \end{aligned} \right\}, \quad (1.47)$$

gdzie moduł sztywności $|k_{mn}|$ opisuje związek (1.36).

Podnosząc równania (1.47) do kwadratu i dodając stronami otrzymujemy [1.9]

$$[C_{mn} - \omega^2 M_{mn}]^2 + \omega^2 D_{mn}^2 = |k_{mn}|^2.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy następujące równania regresji

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = y, \quad (1.48)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= C_{mn}^2 & x_1 &= \omega^2 \\ a_1 &= D_{mn}^2 - 2C_{mn}M_{mn} & x_2 &= \omega^4 \\ a_2 &= M_{mn}^2 & y &= |k_{mn}|^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.49)$$

Analogiczne równania regresji możemy napisać dla każdej częstotliwości wzbudzenia

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_r,$$

co daje w efekcie równania postaci (1.48)

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_r.$$

Jeżeli teraz zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów

$$S = \sum_{i=1}^r (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})^2, \quad (1.50)$$

to suma S w związku (1.50) winna dążyć do minimum.

Nastąpi to dla:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= - \sum_{i=1}^r y_i + r a_0 + a_1 \sum_{i=1}^r x_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^r x_{2i} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= - \sum_{i=1}^r y_i x_{1i} + a_0 \sum_{i=1}^r x_{1i} + a_1 \sum_{i=1}^r x_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^r x_{2i} x_{1i} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= - \sum_{i=1}^r y_i x_{2i} + a_0 \sum_{i=1}^r x_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^r x_{1i} x_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^r x_{2i}^2 = 0. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań możemy napisać w postaci macierzowej uwzględniając oznaczenia (1.49)

$$\begin{bmatrix} r & \sum_{i=1}^r \omega_i^2 & \sum_{i=1}^r \omega_i^4 \\ \sum_{i=1}^r \omega_i^2 & \sum_{i=1}^r \omega_i^4 & \sum_{i=1}^r \omega_i^6 \\ \sum_{i=1}^r \omega_i^4 & \sum_{i=1}^r \omega_i^6 & \sum_{i=1}^r \omega_i^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r y_i \\ \sum_{i=1}^r y_i \omega_i^2 \\ \sum_{i=1}^r y_i \omega_i^4 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Ponieważ znamy wartości ω_i z przedziału $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$, a także znamy wartości y_i jako kwadrat modułu sztywności – zw. (1.49)

$$y_i = |k_{mn}(\omega_i)|^2, \quad (1.52)$$

jedyne niewiadomymi pozostają wielkości a_0 , a_1 , a_2 i tym samym, zgodnie z oznaczeniami (1.49), poszukiwane wartości C_{mn} , D_{mn} i M_{mn} czyli

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \sqrt{a_0} M_{mn} = \sqrt{a_2}, \\ D_{mn} &= \sqrt{a_1 + 2C_{mn} M_{mn}}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Równanie (1.51) i zw. (1.53) pozwalają nam zatem na **jednoznaczne** wyznaczenie rzeczywistych charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych dla danej serii r pomiarów drgań konstrukcji podpierającej.

Zauważmy, iż w procedurze tej wyznaczone wartości współczynników mas związanych M_{mn} , tłumienia D_{mn} i sztywności C_{mn} są stałe (niezależne od ω) dla całego przedziału $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$ częstości wzbudzenia układu.

W przypadku układów w pełni rozsprzężonych, tzn. w przypadku konstrukcji podpierającej dla której można przyjąć iż oddziaływania w więziach zarówno skośne (w obrębie jednej podpory) jak i sprzęgające (w obrębie różnych podpór) są pomijalnie małe, to procedurę wyznaczania rzeczywistych charakterystyk C_{mn} , D_{mn} , M_{mn} można nieco uprościć. W takim przypadku w macierzy podatności \mathbf{L}_{mn} występuje jedynie główna przekątna czyli elementy l_{11} , l_{22} , l_{33} , ..., l_{NN} , z których moduł ma następującą strukturę

$$|l_{mn}| = \frac{A_{mn}}{P_m^0} \quad \text{gdzie } m = n = 1, 2, \dots, N.$$

Macierz sztywności \mathbf{K}_{mn} (jako efekt odwrócenia macierzy \mathbf{L}_{mn}) będzie również macierzą diagonalną, której moduły na głównej przekątnej mają postać

$$|k_{mn}| = \frac{P_m^0}{A_{mn}}, \quad \text{gdzie } m = n = 1, 2, \dots, N.$$

W obu powyższych wyrażeniach P_m^0 oznacza amplitudę siły wymuszającej w więzi m a A_{mn} amplitudę przemieszczenia w tej więzi.

Jeżeli dysponujemy serią r pomiarów czyli mamy

$$P_m^0(\omega_i) \quad \text{oraz} \quad A_{mn}(\omega_i), \quad \text{gdzie } i = 1, 2, \dots, r; \quad m = n = 1, 2, \dots, N,$$

to moduł sztywności $|k_{mn}(\omega_i)|$ możemy od razu przedstawić jako

$$|k_{mn}(\omega_i)| = \frac{P_m^0(\omega_i)}{A_{mn}(\omega_i)}. \quad (1.54)$$

Związek (1.52) przyjmie więc postać

$$y_i = \left[\frac{P_m^0(\omega_i)}{A_{mn}(\omega_i)} \right]^2. \quad (1.55)$$

Odpada w takim przypadku konieczność budowy macierzy podatności, ich odwracania i wyznaczania modułów sztywności wg zależności (1.36). Pozostały tok postępowania jest identyczny jak dla przypadku układów sprzężonych tzn. rozwiązujemy równanie (1.51) i wyznaczamy poszukiwane wartości charakterystyk M_{mn} , D_{mn} , C_{mn} z zależności (1.53).

Warto zaznaczyć, iż powyższa metoda jest w istocie metodą poszukiwania pewnych uśrednionych wartości rzeczywistych charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych z całego rozpatrywanego przedziału $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$. W złożonych konstrukcjach metoda ta może być zawodna.

1.5 Metodologia obliczeń nieliniowych

Otrzymane w oparciu o metody przedstawione w poprzednim rozdziale jako efekt identyfikacji rzeczywiste charakterystyki masowo-tłumiąco-sztywnościowe konstrukcji podpierającej \mathbf{M}_{mn} , \mathbf{D}_{mn} , \mathbf{C}_{mn} pozwalają nam już na rozwiązanie równań ruchu całego systemu w postaci (1.5). Rozwiązaniem tych równań są między innymi trajektorie przemieszczeń i widma drgań we wszystkich więziach utwierdzających panwie łożyskowe. Ponieważ trajektorie te są nieeliptyczne (co jest efektem opisu nieliniowego), ich widma mają w dziedzinie częstotliwości strukturę złożoną tzn. wieloprążkową która odpowiadać może części lub całemu zakresowi analizowanych częstości wzbudzenia konstrukcji podpierającej $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$. Oczywiście chodzi tu o zakresy częstotliwości które wyznaczają tylko znaczące (wysokoenergetyczne) prążki w strukturze widma, a nie tzw. „szum”.

Zagadnienie jest jednoznaczne, jeżeli z jednej strony w wyniku procedury identyfikacyjnej udało nam się określić rzeczywiste charakterystyki \mathbf{M}_{mn} , \mathbf{D}_{mn} , \mathbf{C}_{mn} które uznać można za stałe i adekwatne dla całego rozpatrywanego przedziału częstości wzbudzenia $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$, a z drugiej strony, otrzymane jako wynik rozwiązania równań ruchu, zakresy częstotliwości widm drgań dla wszystkich podpór mieszczą się w tym samym przedziale $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$. Sytuację taką, dla przykładowej podpory „i”, ilustruje rys. 1.11.

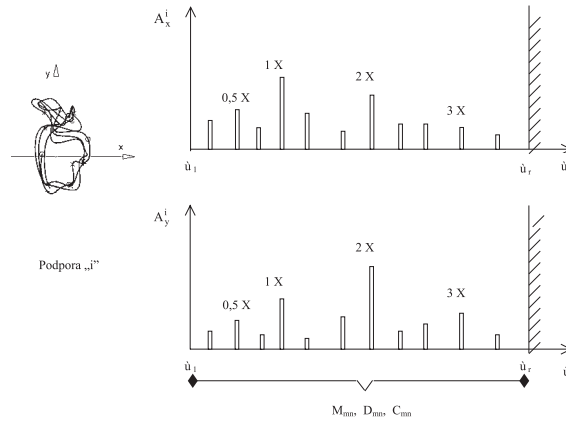
Niestety, sytuacja przedstawiona na rys. 1.11 zachodzi w praktyce stosunkowo rzadko. Na ogół wyznaczone przedziały adekwatności charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych są znacznie mniejsze niż zakresy częstotliwościowe widm drgań poszczególnych podpór. Ponadto, dla każdej analizowanej podpory sytuacja może być odmienna. Metodologia obliczeń nieliniowych w takich przypadkach staje się o wiele bardziej złożona.

Przedstawimy teraz pewne nowe propozycje postępowania w tego rodzaju przypadkach.

1.5.1 Metoda funkcji wagowych

Założmy, iż dysponujemy dynamicznymi macierzami podatności konstrukcji podpierającej

$$\mathbf{L}_{mn}(\omega_1), \mathbf{L}_{mn}(\omega_2), \mathbf{L}_{mn}(\omega_3), \dots, \mathbf{L}_{mn}(\omega_{r-1}), \mathbf{L}_{mn}(\omega_r)$$



Rys. 1.11. Przykład jednoznaczności zagadnienia – zakresy znaczących składowych widm drgań podpory „i” mieszczą się w zakresie identyfikacji charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych konstrukcji podpierającej $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$.

$1X$ – oznaczenie linii spektralnej widma odniesionej do prędkości obrotowej wirnika (prążek „synchroniczny”)

A_x^i, A_y^i – amplitudy składowych poziomych i pionowych widm drgań w podporze „i”

z analizowanego przedziału częstotliwości wzbudzenia $\langle \omega_1, \omega_r \rangle$.

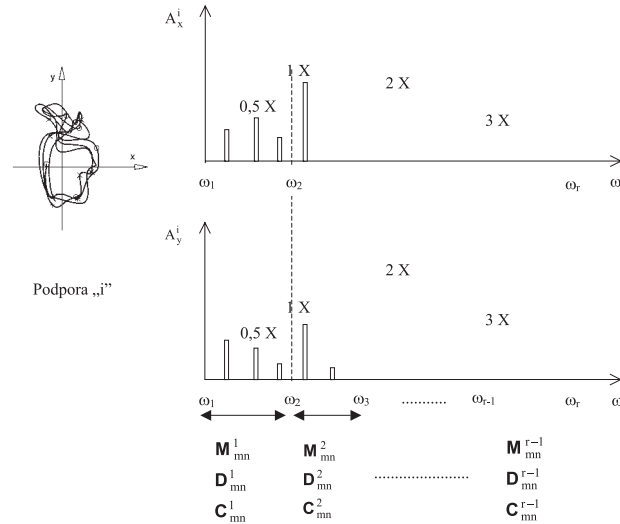
Na ich podstawie, w wyniku procesu identyfikacji otrzymujemy następujące charakterystyki masowo-tłumiąco-sztywnościowe obowiązujące tylko w ściśle określonych przedziałach:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle \omega_1, \omega_2 \rangle & \langle \omega_2, \omega_3 \rangle & \langle \omega_{r-1}, \omega_r \rangle \\
 \mathbf{M}_{mn}^1 & \mathbf{M}_{mn}^2 & \mathbf{M}_{mn}^{r-1} \\
 \mathbf{D}_{mn}^1 & \mathbf{D}_{mn}^2 & \mathbf{D}_{mn}^{r-1} \\
 \mathbf{C}_{mn}^1 & \mathbf{C}_{mn}^2 & \mathbf{C}_{mn}^{r-1} .
 \end{array}$$

Tymczasem równania ruchu całego systemu (1.5) mogą być rozwiązane tylko dla jednego zestawu powyższych charakterystyk. Oznacza to konieczność postępowania krokowego, co szczegółowo wyjaśnimy w dalszych rozważaniach.

Celem rozwiązania równań ruchu (1.5) i uzyskania odpowiedzi układu w postaci widm drgań dla wszystkich podpór, przyjmujemy w pierwszym kroku wartości charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych z dowolnego powyższego przedziału. W efekcie uzyskamy składowe widm $A_x^i(\omega), A_y^i(\omega)$ dla każdej podpory „i”. Załóżmy, że zakres częstotliwości widm drgań, chociaż znacznie większy od poszczególnych podprzedziałów adekwatności charakterystyk, nie przekracza górnej

granicy częstości ω_r . Mamy więc do czynienia z sytuacją, którą ilustruje rys. 1.12.



Rys. 1.12. Przykład typowej sytuacji, w której zakres częstotliwości składowych widma dla podpory „i” jest większy niż poszczególne zakresy adekwatności charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych konstrukcji podpierającej

Powtarzając obliczenia dla innego zestawu charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych adekwatnych do innego przedziału częstości wzbudzenia, otrzymamy oczywiście inne widma drgań podpór, co oznacza inne rozwiązania równania (1.5). Powstaje zatem uzasadnione pytanie: który z powyższych zestawów charakterystyk lub jaką ich kombinację uznać za najbardziej wiarygodną dla równań ruchu całego systemu?

Odpowiedź na to pytanie nie jest łatwa, chociaż wydawać by się mogło, iż przyjęcie zakresu, w którym mieści się prędkość znamionowa wirnika (lub aktualnie rozpatrywana) powinno być zabiegiem wystarczającym. Sytuacja jest jednak tego rodzaju, że pomimo realizacji obliczeń kinetostatycznych i dynamicznych dla jednej konkretnej prędkości obrotowej wirnika, to w wyniku otrzymujemy wymuszenie konstrukcji podpierającej w szerokim paśmie częstości, a nie tylko wymuszenia synchroniczne odpowiadające prędkości znamionowej czyli typu 1X.

Jak zatem rozwiązać ten problem? **Rozsądnym pomysłem wydaje się tu powiązanie procedury doboru charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych konstrukcji podpierającej ze strukturą widma drgań podpór stanowiącą odpowiedź układu na wymuszenia synchroniczne.**

Jednym z możliwych sposobów realizacji tego pomysłu jest **koncepcja funkcji**

wagowych, którą można zapisać w następujący sposób (dla podpory „i”)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^z \\ \mathbf{D}_{mn}^z \\ \mathbf{C}_{mn}^z \end{pmatrix} = a_{1x}^i \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^1 \\ \mathbf{D}_{mn}^1 \\ \mathbf{C}_{mn}^1 \end{pmatrix} + a_{2x}^i \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^2 \\ \mathbf{D}_{mn}^2 \\ \mathbf{C}_{mn}^2 \end{pmatrix} + \dots + a_{r-1,x}^i \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^{r-1} \\ \mathbf{D}_{mn}^{r-1} \\ \mathbf{C}_{mn}^{r-1} \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

gdzie: $m = 1, 2, 3, \dots, 2p$, natomiast: $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 1$ oraz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^z \\ \mathbf{D}_{mn}^z \\ \mathbf{C}_{mn}^z \end{pmatrix} = a_{1y}^i \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^1 \\ \mathbf{D}_{mn}^1 \\ \mathbf{C}_{mn}^1 \end{pmatrix} + a_{2y}^i \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^2 \\ \mathbf{D}_{mn}^2 \\ \mathbf{C}_{mn}^2 \end{pmatrix} + \dots + a_{r-1,y}^i \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mn}^{r-1} \\ \mathbf{D}_{mn}^{r-1} \\ \mathbf{C}_{mn}^{r-1} \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

gdzie: $m = 1, 2, \dots, 2p$, natomiast: $\mathbf{n} = 2\mathbf{i}$.

W związkach (1.56) i (1.57) poszczególne indeksy oznaczają:

- z – charakterystyki zastępcze;
- i – numer podpory;
- p – ilości podpór;
- $1, 2, \dots, r - 1$ – numery przedziałów częstości wzbudzenia;
- x, y – składowe poziome i pionowe odpowiednio;
- m, n – indeksy dla sił i przemieszczeń odpowiednio (zgodnie z definicją podaną na rys. 1.10),

natomiast symbol a oznacza tu **funkcje wagowe** określone według następującej propozycji:

$$\left. \begin{aligned} a_{1x}^i &= \frac{\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_x^i(\omega) d\omega}{\frac{1}{\omega_r - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_r} A_x^i(\omega) d\omega} \\ a_{2x}^i &= \frac{\frac{1}{\omega_3 - \omega_2} \int_{\omega_2}^{\omega_3} A_x^i(\omega) d\omega}{\frac{1}{\omega_r - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_r} A_x^i(\omega) d\omega} \\ &\dots \\ a_{r-1,x}^i &= \frac{\frac{1}{\omega_r - \omega_{r-1}} \int_{\omega_{r-1}}^{\omega_r} A_x^i(\omega) d\omega}{\frac{1}{\omega_r - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_r} A_x^i(\omega) d\omega} \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

i analogicznie dla składowej y

$$\left. \begin{aligned} a_{1y}^i &= \frac{\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_y^i(\omega) d\omega}{\frac{1}{\omega_r - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_r} A_y^i(\omega) d\omega} \\ a_{2y}^i &= \frac{\frac{1}{\omega_3 - \omega_2} \int_{\omega_2}^{\omega_3} A_y^i(\omega) d\omega}{\frac{1}{\omega_r - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_r} A_y^i(\omega) d\omega} \\ &\dots \\ a_{r-1,y}^i &= \frac{\frac{1}{\omega_r - \omega_{r-1}} \int_{\omega_{r-1}}^{\omega_r} A_y^i(\omega) d\omega}{\frac{1}{\omega_r - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_r} A_y^i(\omega) d\omega} \end{aligned} \right\} . \quad (1.59)$$

Związki (1.56)÷(1.57) oznaczają, iż dobór charakterystyk zastępczych jest zależny w sposób wprost proporcjonalny od gęstości widmowej odpowiedzi układu w miejscach posadowienia wirnika.

Otrzymane ze zw. (1.56) i (1.57) charakterystyki zastępcze \mathbf{M}_{mn}^z , \mathbf{D}_{mn}^z , \mathbf{C}_{mn}^z pozwalają nam na uruchomienie drugiego kroku, tzn. powtórzenie obliczeń z uwzględnieniem w równaniach (1.5) ich nowych wartości. W efekcie otrzymamy nowe widma drgań oraz nowe funkcje wagowe i tym samym kolejne charakterystyki zastępcze konstrukcji podpierającej. Postępowanie powyższe kontynuujemy tak długo, aż charakterystyki zastępcze w kolejnych iteracjach będą się różniły wystarczająco mało, a cały proces przyjmie charakter postępowania zbieżnego.

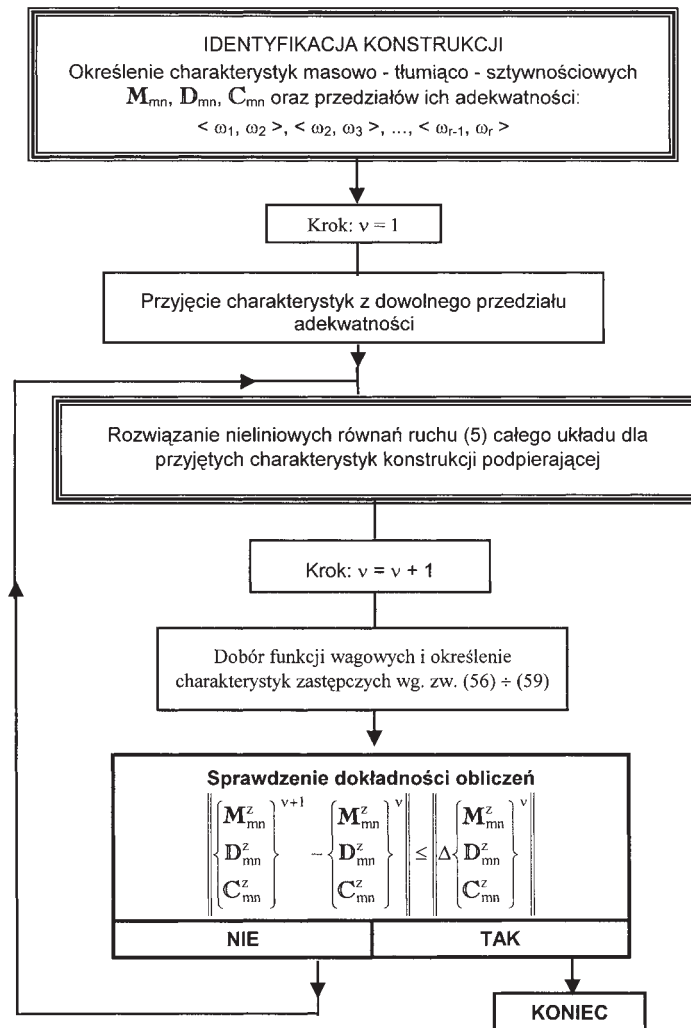
Opisane wyżej postępowanie przedstawić można w postaci algorytmu jak na rys. 1.13.

Jeśli powyższy proces będzie zbieżny, to uzyskane wyniki będą niezależne od przyjętych w pierwszym kroku wartości charakterystyk z dowolnego przedziału adekwatności, a całe postępowanie uznać będzie można za wiarygodne.

Celem ułatwienia zrozumienia istoty zaproponowanej metodologii obliczeń rozważmy kilka prostych przypadków szczególnych Załóżmy, iż w wyniku procesu identyfikacji otrzymaliśmy charakterystyki adekwatne tylko dla dwóch zakresów częstotliwości, czyli:

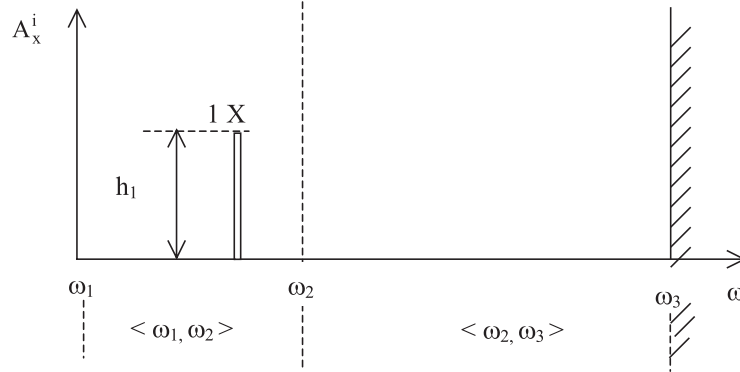
$$\begin{array}{cc} \langle \omega_1, \omega_2 \rangle & \langle \omega_2, \omega_3 \rangle \\ \mathbf{M}_{mn}^1 & \mathbf{M}_{mn}^2 \\ \mathbf{D}_{mn}^1 & \mathbf{D}_{mn}^2 \\ \mathbf{C}_{mn}^1 & \mathbf{C}_{mn}^2 \end{array} .$$

Przyjmijmy następnie, iż w wyniku rozwiązania równań ruchu (1.5), po przyjęciu jednego z powyższych zestawów, otrzymaliśmy następujące wyniki:



Rys. 1.13. Algorytm obliczeń nieliniowych układu: linia wirników – konstrukcja podpierająca z uwzględnieniem modyfikacji charakterystyk masowo-tłumiąco-sztywnościowych według koncepcji funkcji wagowych

- I. Składowa pozioma lub pionowa drgań jednej z podpór zawiera tylko jeden „prążek” synchroniczny typu 1X, co ilustruje poniższy szkic.



Całki w wyrażeniach (1.59) przyjmują teraz postać:

$$\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_x^i(\omega) d\omega = h_1,$$

$$\frac{1}{\omega_3 - \omega_2} \int_{\omega_2}^{\omega_3} A_x^i(\omega) d\omega = 0,$$

$$\frac{1}{\omega_3 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_3} A_x^i(\omega) d\omega = h_1,$$

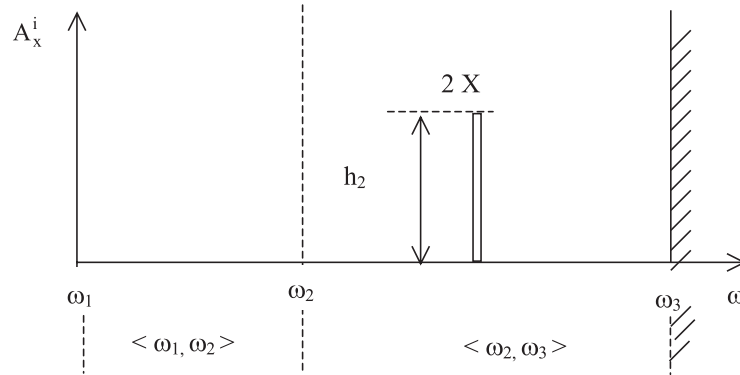
co wyznacza następujące funkcje wagowe

$$a_{1x}^i = 1 \text{ oraz } a_{2x}^i = 0.$$

Wobec powyższego, jak wynika to z zw. (1.56), charakterystyki zastępcze możemy określić jako

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{mn}^z \\ \mathbf{D}_{mn}^z \\ \mathbf{C}_{mn}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{mn}^1 \\ \mathbf{D}_{mn}^1 \\ \mathbf{C}_{mn}^1 \end{Bmatrix}.$$

- II. Składowa widma drgań jednej z podpór zawiera tylko jeden „prążek” asynchroniczny typu 2X. Zilustrowano to na poniższym rysunku.



Otrzymamy w tym przypadku

$$\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_x^i(\omega) d\omega = 0,$$

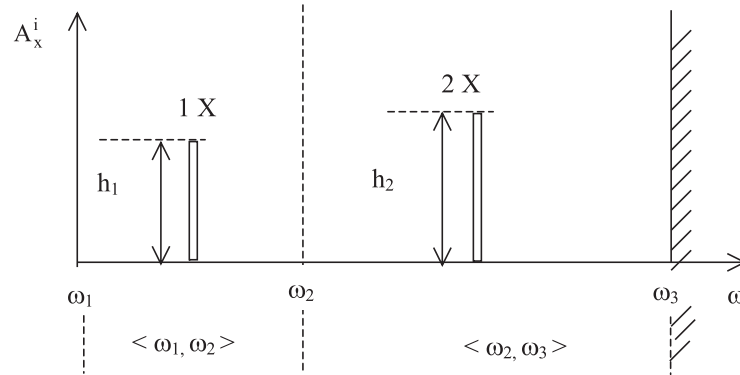
$$\frac{1}{\omega_3 - \omega_2} \int_{\omega_2}^{\omega_3} A_x^i(\omega) d\omega = h_2,$$

$$\frac{1}{\omega_3 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_3} A_x^i(\omega) d\omega = h_2,$$

$$a_{1x}^i = 0 \quad a_{2x}^i = 1,$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{mn}^z \\ \mathbf{D}_{mn}^z \\ \mathbf{C}_{mn}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{mn}^2 \\ \mathbf{D}_{mn}^2 \\ \mathbf{C}_{mn}^2 \end{Bmatrix}.$$

III. Składowa widma drgań jednej z podpór zawiera jeden „prążek” synchroniczny 1X i jeden „prążek” asynchroniczny 2X (patrz rysunek).



Jeżeli założymy, że prążki 1X i 2X znajdują się w środku równych przedziałów adekwatności to możemy napisać:

$$\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_x^i(\omega) d\omega = h_1,$$

$$\frac{1}{\omega_3 - \omega_2} \int_{\omega_2}^{\omega_3} A_x^i(\omega) d\omega = h_2,$$

$$\frac{1}{\omega_3 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_3} A_x^i(\omega) d\omega = h_1 + h_2,$$

$$a_{1x}^i = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \quad a_{2x}^i = \frac{h_2}{h_1 + h_2};$$

zatem

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M}_{mn}^z \\ \mathbf{D}_{mn}^z \\ \mathbf{C}_{mn}^z \end{array} \right\} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M}_{mn}^1 \\ \mathbf{D}_{mn}^1 \\ \mathbf{C}_{mn}^1 \end{array} \right\} + \frac{h_2}{h_1 + h_2} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{M}_{mn}^2 \\ \mathbf{D}_{mn}^2 \\ \mathbf{C}_{mn}^2 \end{array} \right\}.$$

1.6 Uwagi końcowe

Trudno na obecnym etapie jednoznacznie ocenić, która z prezentowanych metod transformacji charakterystyk konstrukcji podpierającej oraz obliczeń nieliniowych całego systemu może być najbardziej użyteczna w praktyce. Zależy to bowiem od własności samej konstrukcji a ściślej od stopnia złożoności jej modelu modalnego, dostępnych danych pomiarowych lub symulacyjnych oraz od możliwości oddziaływania tych elementów konstrukcji podpierającej które mogą mieć charakterystyki nieliniowe. Ostatecznym kryterium użyteczności tych metod mogą być tylko

pozytywne wyniki dużej ilości testów numerycznych i oczywiście weryfikacji eksperymentalnej. Mimo wszystko, najbardziej rokująca powodzenie wydaje się być metoda odpowiedniego podziału całego zakresu częstości wzbudzenia na mniejsze podzakresy o ile dysponujemy odpowiednią ilością danych pomiarowych oraz metoda funkcji wagowych w odniesieniu do obliczeń nieliniowych. Wskazują na to niektóre dane literaturowe [1.4, 1.6, 1.8]. W każdym jednak przypadku właściwa identyfikacja własności konstrukcji podpierającej dużych maszyn wirnikowych pozostaje poważnym problemem. Stąd też zagadnienia identyfikacji i transformacji charakterystyk konstrukcji podpierającej są przedmiotem badań w wielu ośrodkach naukowych i przemysłowych [1.1]÷[1.10], [1.24]. Również metodologia obliczeń nieliniowych całego systemu dla znanych już charakterystyk konstrukcji podpierającej pozostaje zagadnieniem złożonym. Realizacja tego rodzaju obliczeń wymaga dużego doświadczenia zespołu badawczego a także sprzętu komputerowego najnowszej generacji.

W rozdziale 8 niniejszej monografii przedstawione zostaną próby obliczeń charakterystyk dynamicznych małej i dużej maszyny wirnikowej według zaproponowanej metodologii. Dokonana zostanie odpowiednia transformacja charakterystyk i wyznaczone zostaną właściwe przedziały adekwatności wychodząc z pomiarów eksperymentalnych podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej wirnika laboratoryjnego i obiektu rzeczywistego (turbozespołu o mocy 200 MW). Uzyskane wyniki pozwolą na ocenę wpływu zaproponowanego opisu na stan dynamiczny analizowanych obiektów.

Bibliografia do rozdziału 1

- [1.1] Ewins D. J.: *Model Testing: Theory and Practice*, RSP Ltd, John Wiley& Sons Inc., New York-Toronto-Singapore 1995.
- [1.2] Uhl T.: *Eksplatacyjna analiza modalna*, Wydawnictwo Katedry Dynamiki Maszyn i Robotyki, AGH, Kraków 1999.
- [1.3] Uhl T.: *Komputerowo wspomagana identyfikacja modeli konstrukcji mechanicznych*, WNT, Warszawa, Wspomaganie komputerowe CAD/CAM.
- [1.4] Sinha J. K., Friswell M. I., Lees A. W.: *The identification of the unbalance and the foundation model of a flexible rotating machine from a single run-down*, Vibration Laboratory, Atomic Research Centre, Mumbai, India.
- [1.5] Krodkiwski J. M., Ding J., Zhang N.: *Identification of unbalance change using a non-linear mathematical model for multi-bearing rotor systems*, J. of Sound and Vibration (1994) **169**(5), 685-698.
- [1.6] Lees A. W., Friswell M. I.: *The evaluation of rotor imbalance in flexibly mounted machines*, J. of Sound and Vibration (1997) **208**(5), 671-683.
- [1.7] Gnielka P.: *Modal balancing of flexible rotors without test runs: an experimental investigation*, J. of Sound and Vibration (1983) **90**(2), 157-172.

- [1.8] Feng N. S., Hahn E. J.: *Including foundation effects on the vibration behaviour of rotating machinery*, Mechanical Systems and Signal Processing, (1995) **9**(3), 243-256.
- [1.9] Krawczuk M.: *Identyfikacja parametrów konstrukcji podpierającej łożyska wielkogabarytowych wirników maszyn energetycznych*, Opr. wewn. IMP PAN, Gdańsk 1998.
- [1.10] Krawczuk M., Ostachowicz W.: *Metoda obliczania parametrów masowo-tłumiąco-sztywnościowych podpór w oparciu o dane eksperymentalne*, Opr. wewn. IMP PAN, nr arch. 210/2000, Gdańsk 2000.
- [1.11] Walczyk Z.: *Metody określania danych wejściowych do programów obliczania giętych drgań linii okrętowych wałów napędowych i wirników maszyn energetycznych oraz strategii przeprowadzania takich obliczeń*, raport z pracy badawczej nr 45632/97, Pol. Gdańska, Gdańsk 1997.
- [1.12] Gerlach T., Rybczyński J., Makowiecki L.: *Doświadczenia w eksperymentalnym wyznaczaniu własności dynamicznych wybranych konstrukcji*, Opr. wewn. IMP PAN, Gdańsk 1998.
- [1.13] Gerlach T.: *Analiza wyników eksperymentalnych badań własności drganiowych nośnych konstrukcji maszyn*, Opr. wewn. IMP PAN, nr arch. 376/97, Gdańsk 1997.
- [1.14] Rybczyński J.: *Wyznaczanie współczynników dynamicznych podparcia stanowiska badawczego dynamiki wirników w oparciu o macierze podatności uzyskane metodą wymuszeń harmonicznnych*, Opr. wewn. IMP PAN, Gdańsk 1998.
- [1.15] Kiciński J.: *Nonlinear model of vibration in rotor/bearings system - calculation algorithm*, Machine Dynamics Problems, Vol. 15, 1996, 45-60.
- [1.16] Kiciński J.: *Nonlinear model of vibration in rotor/bearings system - calculation results*, Machine Dynamics Problems, Vol. 15, 1996, 61-73.
- [1.17] Kiciński J., Drozdowski R., Materny P.: *The non-linear analysis of the effect of support construction properties on the dynamic properties of multi-support rotor systems*, J. of Sound & Vibration (1997) **206**(4), 523-539.
- [1.18] Kiciński J., Drozdowski R., Materny P.: *Nonlinear model of vibrations in a rotor-bearings system*, J. of Vibrat. & Control, Vol. 4, No. 5, 1998, 519-540.
- [1.19] Kiciński J.: *Influence of Thermal Phenomena in the Slide Bearings on the Dynamics of a Simple Rotor-Bearings System*, Machine Dynamics Problems, Vol. 6, 1993, 37-60.
- [1.20] Kiciński J., Haller R.: *Computer Optimization on External Fixings and Preliminary Cramp of a Bush with Respect to Static and Dynamic Properties of Journal Bearings*, Trans. ASME, J. of Tribology, Vol. 116, Oct. 1994.

- [1.21] Kiciński J.: *Teoria i badania hydrodynamicznych poprzecznych łożysk ślizgowych*, Ossolineum 1994.
- [1.22] Kiciński J.: *New Method of Description of Dynamic Properties of Slider Bearings*, Wear, No. 132, 1989, 205-220.
- [1.23] Cholewa W., Kiciński J.: *Diagnostyka techniczna – odwrotne modele diagnostyczne*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997.
- [1.24] Walczyk Z.: *Dynamika wirnikowych maszyn energetycznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Mechanika nr 64, 1992.
- [1.25] Kiciński J., Markiewicz-Kicińska A.: *Programy NLDW-70 do obliczeń sprzężonych form drgań giętno-wzdłużno-skrętnych z imperfekcjami typu pęknięcie wału i rozosiowania elementów*, Opr. zew. IMP PAN, nr arch. 357/2000, Gdańsk 2000.
- [1.26] Nandi A., Neogy S.: *Dynamic response of cracked beams and beams with an imperfect support*, Proc. of VETOMAC-1 Conference, Bangalore, India, 2000, (na CD, poz. CP 114).
- [1.27] Rao J. S., Sreenivas R.: *Dynamic Analysis of Misaligned rotor systems*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore, India, 2000, (na CD, CP 048).
- [1.28] Raghavendra Rao B., Padmanabhan Ch.: *Dynamic sensitivity analysis for mechanical systems with localized nonlinearities*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore, India, 2000, (na CD, poz. CP 029).
- [1.29] Rao J. S., Sharma M.: *Dynamic analysis of bowed rotors*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore, India, 2000, (na CD, poz. CP 022).
- [1.30] Vyas, N. S., Jain N., Pandey S.: *Fault identification in rotating machinery using neural networks*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore, India, 2000, (na CD, poz. CP 020).
- [1.31] Irretier H. D.: *History and development of experimental modal analysis*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore, India, 2000, (na CD, PP 2).
- [1.32] Lee Chong-Won, Won Kye-Si, Kim Si-Kyoung: *Modal testing of rotors with rotating asymmetry*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore, India, 2000, (na CD, poz. IP 13).
- [1.33] Gaganis B. J., Zisimopoulos A. K., Nikolakopoulos, P. G. Papadopoulos C. A.: *Modal Analysis of rotor on piecewise linear journal bearing under seismic excitation*, Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics, Vol. 121, April 1999, 190-196.
- [1.34] El-Shafei A.: *Modeling fluid inertia forces of short journal bearings for rotor dynamic applications*, Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics, Vol. 117, October 1995, 462-469.

- [1.35] Chan D. S. H.: *Nonlinear analysis of rotor dynamic instabilities in high-speed turbomachinery*, Trans. of the ASME, J. of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 118, Jan. 1996, 122-129.
- [1.36] A. R., Adiletta G.: *Dynamics of a rigid unbalanced rotor with nonlinear elastic restoring forces. Part I: Theoretical Analysis*, Nonlinear Dynamics, 1999, **19**, 359-385 .
- [1.37] Guido A. R., Adiletta G.: *Dynamics of a rigid unbalanced rotor with nonlinear elastic restoring forces. Part II: Experimental Analysis*, Nonlinear Dynamics, 1999, **19**, 387-397.
- [1.38] Adiletta G., Guido A. R., Rossi C.: *Nonlinear dynamics of a rigid unbalanced rotor in journal bearings. Part I: Theoretical Analysis*, Nonlinear Dynamics, 1997, **14**, 57-87.
- [1.39] Adiletta G., Guido A. R., Rossi C.: *Nonlinear dynamics of a rigid unbalanced rotor in journal bearings. Part II: Experimental Analysis*, Nonlinear Dynamics, 1997, **14**, 157-189.
- [1.40] Sundararajan P., Noah S. T.: *Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method – application to rotor systems*, Trans. ASME, J. of Vibration and Acoustics, Vol. 119, Jan. 1997, 9-20.
- [1.41] Chu C. S., Wood K. L., Busch-Vishniac I. J.: *A nonlinear dynamic model with confidence bounds for hydrodynamic bearings*, Trans. of the ASME, J. of Tribology, Vol. 120, July 1998, 595-604.
- [1.42] Lahmar M., Haddad A., Nicolas D.: *An optimised short bearing theory for nonlinear dynamic analysis of turbulent bearings*, Eur. J. Mech. A/Solids, 19 (2000), 151-177.
- [1.43] Ding J., Krodkiewski M.: *Inclusion of static indetermination in the mathematical model for non-linear dynamic analyses of multi-bearing rotor system*, J. of Sound and Vibration, 1993, **164**, 267-280.
- [1.44] Khonsari M. M., Chang Y. J.: *Stability boundary of non-linear orbits within clearance circle of journal bearings*, Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics, 1993, Vol. 115, 303-307.
- [1.45] Adams M. L., Adams M. L., Guo J. S.: *Simulation and experiments of non-linear hysteresis loop for rotor-bearing instability*, IMechE Conference Transactions, Vibrations in Rotating Machinery, 1996, 309-319.
- [1.46] Muszynska A.: *Improvements in lightly loaded rotor/bearing and rotor/seal models*, Trans. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1988, Vol. 110, 129-136.

- [1.47] Muszynska A., Franklin W. D., Bently D. E.: *Rotor active „anti-swirl” control*, Trans. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1988, Vol. 110, 143-150.
- [1.48] Muszynska A., Bently D. E.: *Anti-swirl arrangements prevent rotor/seal instability*, Trans. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1989, Vol. 111, 156-162.
- [1.49] Muszynska A., Bently D. E.: *Fluid-induced instabilities of rotors: whirl and whip*, Bently Rotor Dynamics Research Corporation Report No. 3, 1995.
- [1.50] Kiciński J., Markiewicz-Kicińska A.: *Coupled non-linear vibrations in multi-support rotors founded on slide bearings*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore, India, 2000, (na CD, poz. CP 047).
- [1.51] Kiciński J.: *Coupled non-linear vibrations in multisupported rotors*, Polish Maritime Research, no 3, September 2000, 9-13.
- [1.52] Kiciński J., Rybczyński J., Krawczuk M., Markiewicz-Kicińska A., Banaszek S., Łuczak M., Bagińska M.: *Sprzężone formy drgań zachodzących w wielopodporowych wirnikach maszyn energetycznych*, Opr. wewn. IMP PAN, nr arch. 577/1999, Gdańsk 1999.
- [1.53] Giergiel J., Uhl T.: *Identyfikacja układów mechanicznych*, PWN, Warszawa 1990.
- [1.54] Wicher J.: *Problemy identyfikacji systemów technicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów mechanicznych*, Prace IPPT PAN, nr. 67, 1975.
- [1.55] Sage A. P., Melsa J. L.: *System identification*, New York, Academic Press, 1971.
- [1.56] Zeigler B. P.: *Teoria modelowania i symulacji*, PWN, Warszawa, 1984.
- [1.57] *Modelowanie i diagnostyka oddziaływań mechanicznych, aerodynamicznych i magnetycznych w turbospołach energetycznych*, praca zbiorowa pod red. J. Kicińskiego, PAN Wydział IV Nauk Technicznych, Wydawnictwo IMP PAN, Gdańsk 2005, 1326 str.

