

ROZDZIAŁ 2

MODELOWANIE LINII WIRNIKÓW I ŁOŻYSK

- MODEL MES LINII WIRNIKÓW
- MODELE CIEPLNE ŁOŻYSK ŚLIZGOWYCH
- PODSTAWOWE RÓWNANIA DYNAMIKI

Linia wirników skupia na sobie oddziaływania wszystkich podukładów maszyny wirnikowej. Szczególnie istotne są tu oczywiście oddziaływania łożysk ślizgowych i konstrukcji podpierającej wyrażone w formie współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego i macierzy współczynników sztywności, tłumienia i mas konstrukcji podpierającej. Stanowią one główne elementy globalnych macierzy bezwładności, tłumienia i sztywności w równaniach ruchu linii wirników. Warto zauważyć, że z matematycznego punktu widzenia współczynniki te spinają w jedną logiczną całość równania różniczkowe zwyczajne opisujące ruch całego układu z równaniami różniczkowymi cząstkowymi opisującymi rozkłady przestrzenne ciśnienia hydrodynamicznego lub deformacji termosprężystych. Współczynniki sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych i tym samym globalne macierze tłumienia i sztywności równań ruchu są modyfikowane w każdym kroku czasowym postępowania iteracyjnego realizując tym samym zasadę analizy układu w zakresie nieliniowym, a więc w zakresie niezwykle pożądanym z punktu widzenia diagnostyki według modelu, o czym szczegółowo mówiliśmy w rozdziale 1.

W przyjętym modelu, jeśli chodzi o linię wirników zastosowana została Metoda Elementów Skończonych (MES) z typowym, doskonale znanym z literatury, belkowym elementem skończonym Timoshenki o sześciu stopniach swobody w każdym węźle. Również jeśli chodzi o modelowanie imperfekcji wału typu pęknięcia czy rozosiowania przyjęte zostały znane z literatury modele. Macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej określane są w oparciu o znane i dostępne w kraju światowe programy komercyjne (np.: ABAQUS, ADINA i inne). Największy problem stwarza jednakże konieczność określenia współczynników sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych w każdym kroku czasowym postępowania iteracyjnego. Nawet najbardziej zaawansowane programy komercyjne nie oferują takich rozwiązań, stąd też nie można ich zastosować w formie gotowych wzorców w prezentowanym modelu. W niniejszym rozdziale przedstawiona zostanie własna, oryginalna metoda określania współczynników sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych oparta zarówno na prostych jak i bardzo zaawansowanych modelach cieplnych łożysk ślizgowych i zmodyfikowanej metodzie perturbacji.

Wszystko to razem stanowi bardzo zaawansowany, kompleksowy i wzajemnie spójny **model dynamiczny złożonego układu typu: linia wirników z imperfekcjami–łożyska ślizgowe–konstrukcja podpierająca**, do analizy zarówno w zakresie liniowym, ale przede wszystkim w **zakresie nieliniowym**. Autorowi niniejszej monografii nie są znane inne krajowe odpowiedniki takiego modelu.

*

W niniejszym rozdziale rozważania dotyczące modelowania łożysk ślizgowych zaczniemy od wyjaśnienia istoty pracy łożyska i spraw związanych z wymianą ciepła. Szczególną uwagę poświęcimy jednakże **wzajemnym związkom jakie zachodzą pomiędzy maszyną i jej łożyskami**. Związki te nie zawsze są wystarczająco wyraźnie zaznaczone w publikacjach na temat łożysk ślizgowych i maszyn wirnikowych. Specjaliści zajmujący się głównie łożyskami ślizgowymi często stosują zbyt uproszczone modele maszyny wirnikowej bez analizy oddziaływań sprzężonych i odwrotnie; specjaliści od dynamiki wirników często traktują łożyska jako element układu o stałych, liniowych współczynnikach sztywności i tłumienia, co w istocie oznacza przyjęcie zasady superpozycji w analizie pracy całego układu. W rzeczywistości tego rodzaju podejście jest zasadne tylko w określonych przypadkach. Postaramy się wskazać te przypadki, ale głównie wskażemy zakresy, gdzie tego rodzaju tradycyjne podejście do zagadnienia generuje błędy czasami nawet o charakterze jakościowym.

*

Warto w kontekście prowadzonych w niniejszym rozdziale rozważań podnieść też kwestię zaawansowanych modeli złożonych i modeli prostych: które i kiedy stosować? Pytanie to wbrew pozorom jest zasadne, albowiem w dobie tak zaawansowanej techniki komputerowej i łatwego dostępu do programów komercyjnych o imponujących wręcz możliwościach, wielu współczesnych badaczy, zwłaszcza młodego pokolenia, jest tak zafascynowanych tą techniką, że często proste czy wręcz analityczne modele z dawnych lat nie uzyskują należytej pozycji w ich warsztacie pracy i pozostają w cieniu. Tymczasem modele te stanowić mogą doskonałe uzupełnienie i szybkie narzędzie weryfikacji tradycyjnej i ciągle niezastąpionej intuicji inżynierskiej i zdrowego rozsądku. Modele zaawansowane mają oczywiście swoje ogromne zalety wynikające z ich możliwości, ale mają niestety także wady spowodowane często trudnościami w interpretacji wyników czy uzależnieniem od stabilności i zbieżności metod numerycznych. **Rozsądnym wyjściem wydaje się tu być jednakowy dystans badacza do modeli złożonych i prostych i stosowanie ich w miarę możliwości równoległe lub stosowanie ich wzajemnych kombinacji**. Wychodząc z tej przesłanki przedstawimy w tym rozdziale również pakiet podstawowych równań dynamiki wyprowadzonych **z prostego modelu wirnika (jednomasowego i symetrycznego)**. Powyższe stwarza nam bardzo interesującą możliwość kombinacji modeli. Współczynniki sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych możemy określić bazując zarówno na prostym (izotermicznym) jak i złożonym (diatermicznym) modelu łożyska i tak określone współczynniki wprowadzić do prostego modelu wirnika. Wbrew pozorom taki model nie zawsze musi odbiegać zbyt mocno od modelu rzeczywistego. Wyobraźmy sobie sytuację, kiedy mamy do czynienia z bardzo sztywnym i w miarę symetrycznym wirnikiem oraz niewielkimi siłami zewnętrznymi wymuszającymi drgania układu. Taki układ dość dobrze opisują wspomniane powyżej modele kombinowane: prosty lub złożony model łożyska – prosty model wirnika. Również w przypadkach, kiedy chcemy głównie analizować własności samych łożysk ślizgowych (np. nowo zaprojektowanych) to zawsze lepiej jest to uczynić w powiązaniu z wirnikiem, nawet prostym, niż zupełnie go pomijając (co jest niestety powszechną praktyką). Wynika to z faktu oczywistych związków jakie zachodzą pomiędzy łożyskami i maszyną, o czym pisaliśmy wcześniej.

2.1 Model MES linii wirników

2.1.1 Uwagi wstępne

Przejdziemy teraz do zagadnień związanych ze szczegółowym opisem poszczególnych podukładów tworzących maszynę wirnikową. Punktem wyjścia będą rozważania przeprowadzone w rozdziale 1 a zwłaszcza nieliniowe równania ruchu (1.5) i ogólny algorytm ich rozwiązania (rozdział 1 – rys. 1.2). Z matematycznego punktu widzenia mamy tu do czynienia z nieliniowymi równaniami różniczkowymi **zwyczajnymi** (równania ruchu całego układu) skojarzonymi (powiązаны) z zestawem równań różniczkowych **cząstkowych** opisującym własności łożysk ślizgowych i konstrukcji podpierającej. Skojarzenie to odbywa się za pośrednictwem współczynników sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych z jednej strony i za pomocą współczynników podatności dynamicznej (macierzy podatności) konstrukcji podpierającej z drugiej strony. Oczywiście współczynniki te są obliczane poprzez rozwiązanie równań różniczkowych cząstkowych w każdym punkcie czasowym postępowania iteracyjnego. Współczynniki te z kolei modyfikują globalne macierze sztywności i tłumienia umożliwiając tym samym rozwiązanie nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych w postępowaniu iteracyjnym. Schemat powyższych skojarzeń przedstawia rys. 2.1. Przyjęte zostało rozwiązanie, w którym zaprezentowane na rys. 2.1 poszczególne podukłady maszyny wirnikowej opisywane są za pomocą następujących metod:

- linia wirników z imperfekcjami – **Metoda Elementów Skończonych (MES)**,
- równania ruchu układu – zmodyfikowana metoda New Marka,
- łożyska ślizgowe i uszczelnienia labiryntowe – **Metoda Różnic Skończonych (MRS)**,
- konstrukcja podpierająca – metoda MES (programy komercyjne).

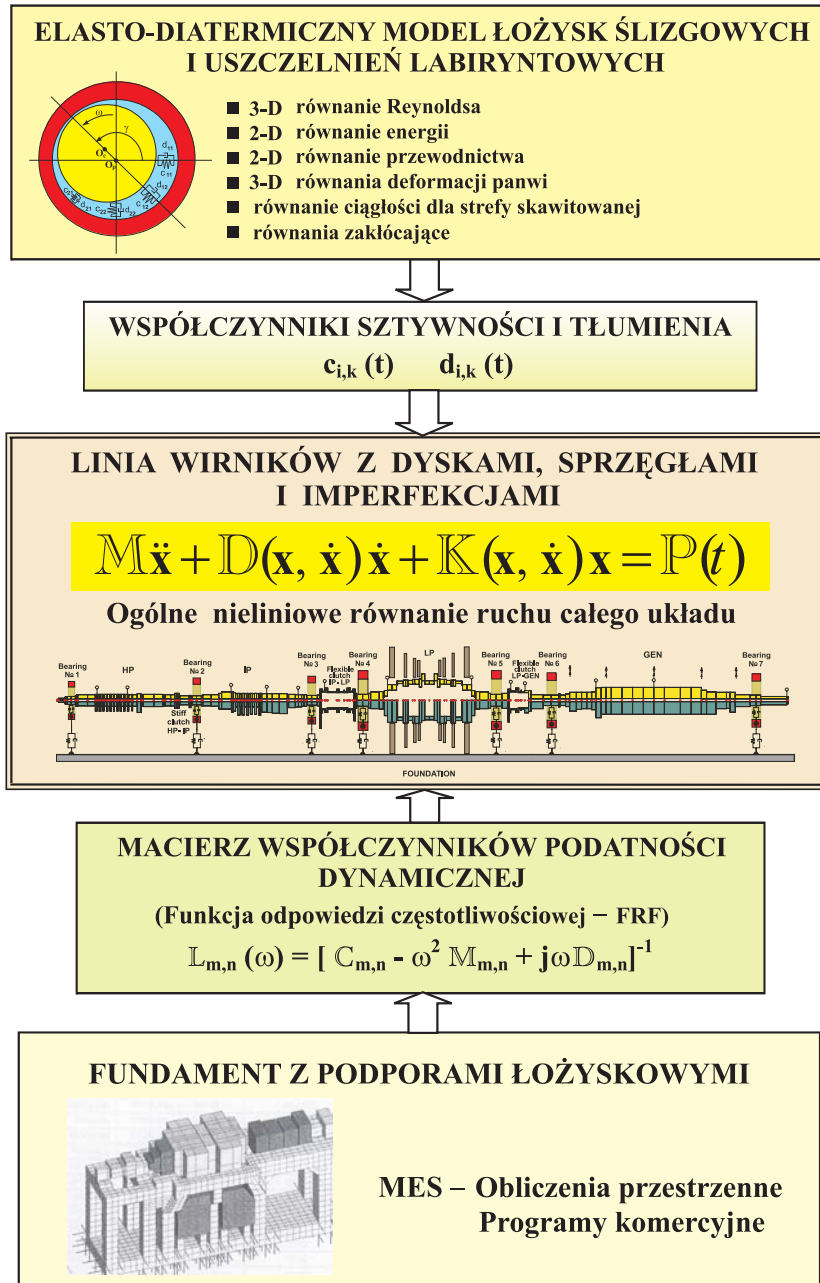
Przejdziemy teraz do szczegółowego opisu elementów tworzących globalne macierze bezwładności \mathbf{M} , tłumienia \mathbf{D} i sztywności \mathbf{K} w równaniu (1.5) z rozdziału 1 (i z rys. 2.1) i tym samym do szczegółowego opisu modeli MES układu wirnikopodpory. Zaczniemy od opisu macierzy charakterystycznych w układzie lokalnym, a następnie przejdziemy do zasad budowy macierzy w układzie globalnym.

Dla celów związanych z opisem struktury poszczególnych macierzy przyjmijmy uproszczony schemat obiektu z rys. 1.1, a mianowicie przyjmijmy typowy model dyskretny wraz z numeracją wirnika np. trójpodporowego – rys. 2.2.

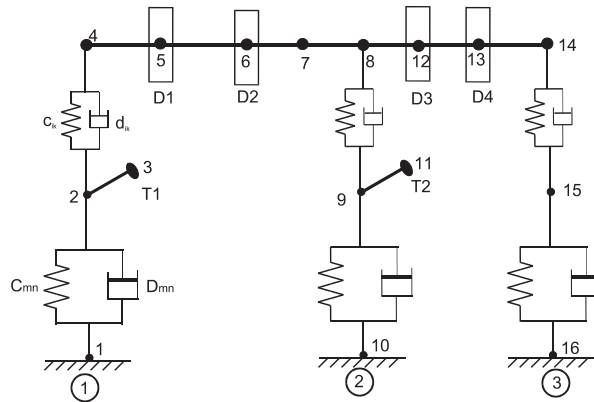
Prezentowany poniżej model, opracowany został zarówno w oparciu o znane zagadnienia klasycznej teorii MES [2.35, 2.10, 2.36] jak i zagadnienia wybrane, dotyczące teorii elementów pękniętych i rozosiowanych [2.4]-[2.7], [2.12, 2.37, 2.38].

Na model ten składają się :

- **Wał wirnika z uwzględnieniem również elementów z pęknięciem i rozosiowaniem.** Do węzłów wału mogą być mocowane dyski sztywne oraz



Rys. 2.1. Zmienne w czasie współczynniki sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych oraz macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej jako elementy łączące główne podukłady maszyny wirnikowej i tym samym elementy umożliwiające rozwiązanie wzajemnie sprzężonych nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych



Rys. 2.2. Model dyskretny wirnika trójpodporowego – przykład numeracji

węzły: 1-2, 10-9, 16-15	– konstrukcja podpierająca;
węzły: 2, 9, 15	– panwie łożyskowe;
węzły: 2-4, 9-8, 15-14	– film olejowy łożysk ślizgowych;
węzły: 2-3, 9-11	– tłumiki prętowe mocowane do panwi;
węzły: 4-5, 5-6,.....,13-14	– elementy belkowe wirnika;
D_1, D_2, D_3, D_4	– dyski sztywne

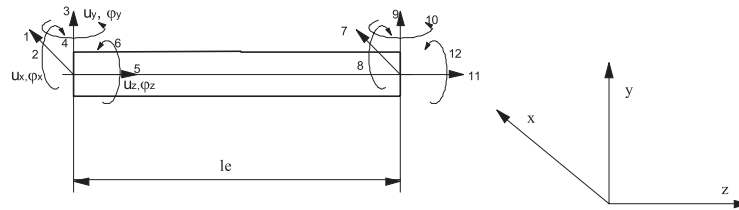
łożyska wzdłużne i tłumiki drgań skrętnych. Na układ oddziaływać mogą wymuszenia spowodowane niewyważeniem wirujących elementów oraz zewnętrzne wymuszenia poprzeczne, wzdłużne i skrętne. Identyfikowane one są również poprzez węzły wału wirnika.

- **Poprzeczne łożyska ślizgowe** (dwa węzły: czop i nieruchoma panew – w węzłach odpowiadających panwiom 2, 9, 15 usuwamy wszystkie stopnie swobody poza przemieszczeniami wzdłuż osi x i y). Do panwi mocowane mogą być tłumiki zewnętrzne-prętowe w formie masy usytuowanej na końcu pręta.
- **Konstrukcja podpierająca** (dwa węzły: panew i nieruchomy fundament – dla węzłów 1, 10, 16 usuwamy wszystkie stopnie swobody).

2.1.2 Macierze charakterystyczne w układzie lokalnym

2.1.2.1 Model wału wirnika

Do celów zamodelowania wału wirnika przyjęty został element belkowy o sześciu stopniach swobody w każdym z węzłów, to znaczy dla każdej współrzędnej geometrycznej x, y, z przyjęto stopnie swobody odpowiadające przemieszczeniu i obrotowi. Rys. 2.3 przedstawia koncepcję takiego elementu z numeracją kolejnych stopni swobody.



Rys. 2.3. Belkowy element skończony o dwóch węzłach i 12 stopniach swobody

Przyjęto następujące oznaczenia indeksów kierunków:

- 1 – przemieszczenie względem osi x – u_x ;
- 2 – obrót wokół osi x – φ_x ;
- 3 – przemieszczenie względem osi y – u_y ;
- 4 – obrót wokół osi y – φ_y ;
- 5 – przemieszczenie względem osi z (drgania wzdłużne) – u_z ;
- 6 – obrót wokół osi z (drgania skrętne) – φ_z .

W związku z powyższym wszystkie macierze charakterystyczne (bezwładności, sztywności, tłumienia) dla każdego elementu w układzie lokalnym będą miały wymiar (12×12) , gdyż element posiada 12 stopni swobody.

Macierz sztywności elementu bez pęknięcia i bez rozosiowania

Macierz sztywności tego elementu obliczamy wykorzystując podatnościowe sformułowanie metody elementów skończonych [2.3, 2.10, 2.35, 2.36], co pozwala przedstawić ją jako iloczyn odpowiednich macierzy transformacji i macierzy podatności:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^t \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}, \quad (2.1)$$

gdzie:

- \mathbf{K}_e – oznacza macierz sztywności elementu;
- \mathbf{T} – jest macierzą transformacji układu sił zależnych do układu sił niezależnych;
- \mathbf{L} – jest macierzą podatności elementu, natomiast indeks t oznacza transpozycję macierzy zaś indeks -1 odwrotność macierzy.

Przedstawimy teraz sposób tworzenia powyższych macierzy.

Macierz transformacji

Macierz transformacji układu sił zależnych do układu sił niezależnych obliczamy wykorzystując do tego celu warunki równowagi statycznej przy założeniu, że siły węzłowe w węzle numer 1 są liniowo niezależne, natomiast siły w węzle numer 2

są wyrażone jako funkcje tych pierwszych. Macierz ta ma następującą postać:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & l_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

gdzie: l_e – oznacza długość elementu belkowego.

Macierz podatności

Macierz podatności elementu bez pęknięcia obliczamy wykorzystując jego energię odkształcenia sprężystego, która wyraża się następującym związkiem:

$$U = \int_0^{l_e} \frac{N^2 dz}{2 * E * S} + \int_0^{l_e} \frac{M_x^2 dz}{2 * E * j_x} + \int_0^{l_e} \frac{M_y^2 dz}{2 * E * j_y} + \int_0^{l_e} \frac{M_s^2 dz}{2 * G * j_s} + \int_0^{l_e} \frac{f_x * P_x^2 dz}{2 * E * S} + \int_0^{l_e} \frac{f_y * P_y^2 dz}{2 * E * S}, \quad (2.3)$$

gdzie:

- l_e – długość elementu;
- S – pole przekroju poprzecznego;
- j_x – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi x układu;
- j_y – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi y układu;
- j_s – moment bezwładności przekroju poprzecznego na skręcenie względem osi z układu, stały, niezależny od kąta obrotu;
- f_x – współczynnik ścinania przekroju poprzecznego względem osi x ;
- f_y – współczynnik ścinania przekroju poprzecznego względem osi y ;
- E – moduł Younga dla materiału z jakiego wykonany jest wirnik;
- G – moduł Kirchoffa dla materiału z jakiego wykonany jest wirnik;
- N, M i P – oznaczają odpowiednie siły i momenty.

Siły i momenty występujące w powyższym równaniu można wyrazić w funkcji niezależnych sił węzłowych wykorzystując do tego następujące związki równowagi:

$$\begin{aligned} N &= P_s, \\ M_s &= P_6, \\ M_y &= P_1 z - P_2, \\ M_x &= P_3 z + P_4, \\ P_y &= P_3, \\ P_x &= P_1. \end{aligned}$$

Podstawiając te związki do formuły opisującej energię odkształcenia sprężystego elementu i następnie różniczkując względem niezależnych sił węzłowych otrzymujemy symetryczną macierz podatności $\mathbf{L}(6 \times 6)$ w następującej postaci (elementy nie wyszczególnione oznaczają elementy zerowe):

$$L(1,1)=l_e ** 3 / (3 * E * j_y) + f_y * l_e / (G * S)$$

$$L(1,2)=l_e ** 2 / (2 * E * j_y)$$

$$L(2,1)=L(1,2)$$

$$L(2,2)=l_e / (E * j_y)$$

$$L(3,3)=l_e ** 3 / (3 * E * j_x) + f_x * l_e / (G * S)$$

$$L(3,4)=l_e ** 2 / (2 * E * j_x)$$

$$L(4,2)=L(2,4)$$

$$L(4,3)=L(3,4)$$

$$L(4,4)=l_e / (E * j_x)$$

$$L(5,2)=L(2,5)$$

$$L(5,4)=L(4,5)$$

$$L(5,5)=l_e / (S * E)$$

$$L(6,1)=L(1,6)$$

$$L(6,3)=L(3,6)$$

$$L(6,6)=l_e / (G * j_s)$$

Uwaga: symbol * oznacza mnożenie, natomiast ** – potęgowanie.

Mając wyznaczone macierze: transformacji \mathbf{T} oraz podatności \mathbf{L} możemy (stosując proste obliczenia macierzowe) wyznaczyć postać macierzy sztywności \mathbf{K}_e omawianego elementu skończonego według związku (2.1).

W zależności od przyjęcia odpowiednich współczynników ścinania f otrzymamy postać modelu belki Bernoulliego-Eulera – współczynniki ścinania przyjmujemy zerowe lub postać modelu belki Timoshenko – współczynniki ścinania obliczamy według algorytmu, który teraz przedstawimy.

Sposób obliczania współczynników ścinania dla modelu Timoshenki

Współczynniki f_x i f_y obliczane są w dwojaki sposób w zależności od tego czy dany element jest elementem wydrążonym czy też nie.

Dla elementów bez wydrążeń (dla przekroju kołowego):

$$\begin{aligned} f_x &= (7 + 6 * \nu) / (6 * (1 + \nu)), \\ f_y &= f_x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dla elementów wydrążonych:

$$\begin{aligned} m &= (d_{wb}/d_{zb}) * 2, \\ f_x &= (((7+6*\nu)*(1+m)**2)+(20+12*\nu)*m)/(6*(1+\nu)*(1+m)**2), \quad (2.5) \\ f_y &= f_x, \end{aligned}$$

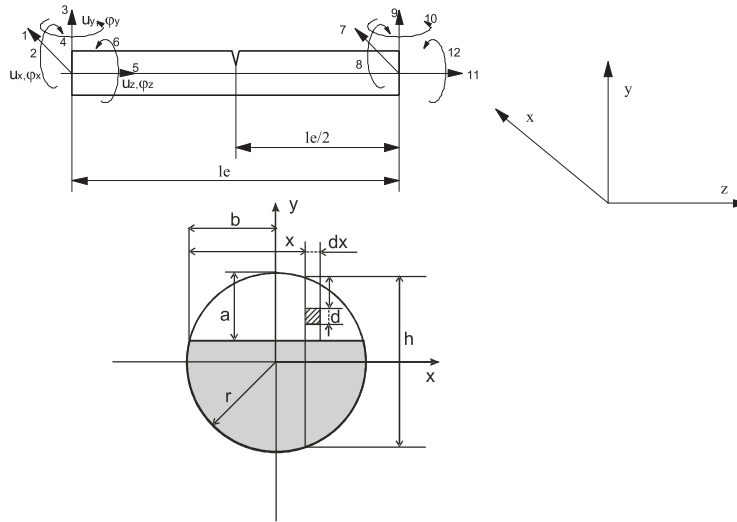
gdzie:

- ν – liczba Poissona;
- d_{zb} – średnica zewnętrzna dla geometrycznego momentu bezwładności danego elementu;
- d_{wb} – średnica wewnętrzna dla geometrycznego momentu bezwładności danego elementu.

Uwaga: Podana metoda obliczania współczynników f_x i f_y obowiązuje we wszystkich omawianych przypadkach tworzenia macierzy charakterystycznych.

Macierz sztywności elementu belkowego dla elementu z pęknięciem

Model elementu z pęknięciem przedstawia rys. 2.4



Rys. 2.4. Schemat elementu belkowego z pęknięciem [2.4]; a – głębokość pęknięcia, b – szerokość pęknięcia

Macierz sztywności dla elementu z pęknięciem jest modyfikowana o dodatkowe podatności wywołane pęknięciem. Obliczana jest z następującej zależności [2.4]÷[2.7], [2.12, 2.37, 2.38]:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^t (\mathbf{L} + \mathbf{L}_d)^{-1} \mathbf{T}, \quad (2.6)$$

gdzie:

- \mathbf{K}_e – oznacza macierz sztywności elementu;
 - \mathbf{T} – jest macierzą transformacji układu sił zależnych do układu sił niezależnych;
 - \mathbf{L} – jest macierzą podatności elementu;
 - \mathbf{L}_d – jest macierzą dodatkowych podatności wywołanych pęknięciem.
- natomiast indeks t oznacza transpozycję macierzy zaś indeks -1 odwrotność macierzy.

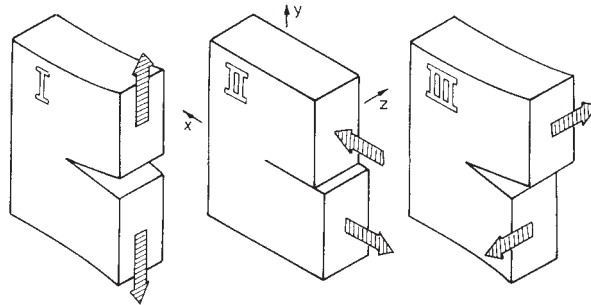
Macierz \mathbf{L}_d obliczamy wykorzystując do tego celu postać energii odkształcenia sprężystego elementu belkowego wywołanej pojawieniem się pęknięcia poprzecznego:

$$\Delta U = \frac{1}{E} \int_A \left[\sum_{n=1}^{n=6} K_{Ii}^2 + \sum_{n=1}^{n=6} K_{IIi}^2 + (1 + \nu) \sum_{n=1}^{n=6} K_{IIIi}^2 \right] dA, \quad (2.7)$$

gdzie:

- E – moduł Younga;
- A – pole powierzchni pęknięcia;
- $K_{ji} (j = I, II, III, i = 1, 6)$ – są to niezerowe współczynniki intensywności naprężeń, zależne od wartości niezależnych sił węzłowych elementu skończonego, odpowiadające trzem przypadkom rozwoju pęknięć [2.37];
- ν – liczba Poissona.

Przyjęty model elementu pękniętego obejmuje trzy klasyczne, podstawowe przypadki rozwoju pęknięć zmęczeniowych, tak jak to przedstawia rys. 2.5. [2.4, 2.37].



Rys. 2.5. Klasyczne przypadki rozwoju pęknięć zmęczeniowych [2.4, 2.37]

Niezerowe współczynniki intensywności naprężeń w przypadku rozpatrywanego

elementu mają postać:

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \frac{4P_2x}{\pi r^4} \sqrt{\pi\alpha} F_{12} \left(\frac{\alpha}{h} \right), \\
K_{14} &= \frac{4P_4}{\pi r^4} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\pi\alpha} F_{14} \left(\frac{\alpha}{h} \right), \\
K_{15} &= \frac{P_5}{\pi r^2} \sqrt{\pi\alpha} F_{15} \left(\frac{\alpha}{h} \right), \\
K_{II3} &= \frac{\beta P_3}{\pi r^2} \sqrt{\pi\alpha} F_{II3} \left(\frac{\alpha}{h} \right), \\
K_{II6} &= \frac{2P_6x}{\pi r^4} \sqrt{\pi\alpha} F_{II6} \left(\frac{\alpha}{h} \right), \\
K_{III1} &= \frac{\beta P_1}{\pi r^2} \sqrt{\pi\alpha} F_{III1} \left(\frac{\alpha}{h} \right), \\
K_{III6} &= \frac{2P_6}{\pi r^4} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\pi\alpha} F_{III6} \left(\frac{\alpha}{h} \right),
\end{aligned}$$

gdzie: α, r, h są wymiarami geometrycznymi przekroju belki w miejscu pęknięcia (rys. 2.4); natomiast F_{ji} ($j = I, II, III, i = 1, 6$) są funkcjami poprawkowymi uwzględniającymi skończone wymiary elementu o postaci:

$$\begin{aligned}
F_{12} &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda}} * \frac{0.923 + 0.199(1 - \sin \lambda)^4}{\cos \lambda}, \\
F_{14} = F_{15} &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda}} * \frac{0.752 + 2.02(\alpha/h) + 0.37(1 - \sin \lambda)^3}{\cos \lambda}, \\
F_{II3} = F_{II6} &= \frac{1.122 - 0.561(\alpha/h) + 0.85(\alpha/h)^2 + 0.18(\alpha/h)^3}{\sqrt{1 - \alpha/h}}, \\
F_{III1} = F_{III6} &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda}},
\end{aligned}$$

gdzie $\lambda = \frac{\pi\alpha}{2h}$.

Podstawiając powyższe zależności do równania opisującego dodatkową energię odkształcenia sprężystego wywołaną pęknięciem oraz różniczkując względem niezależnych sił węzłowych otrzymujemy macierz dodatkowych podatności wywołanych pęknięciem \mathbf{L}_d w postaci:

$$\mathbf{L}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{16} \\ & \mathbf{c}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{24} & \mathbf{c}_{25} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{c}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_{36} \\ & & & \mathbf{c}_{44} & \mathbf{c}_{45} & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{c}_{55} & \mathbf{0} \\ \text{sym.} & & & & & \mathbf{c}_{66} \end{bmatrix}.$$

Niezerowe wyrazy tej macierzy obliczamy ze związków:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{4\beta^2}{\pi r} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{III1}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} d\bar{x}, \\
c_{22} &= \frac{64}{\pi r^3} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{I2}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} \bar{x}^2 d\bar{x}, \\
c_{33} &= \frac{4\beta^2}{\pi r} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{II3}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} d\bar{x}, \\
c_{44} &= \frac{64}{\pi r^3} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{I4}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} (1 - \bar{x}^2) d\bar{x}, \\
c_{55} &= \frac{4}{\pi r} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{I5}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} d\bar{x}, \\
c_{66} &= \frac{16}{\pi r^3} [(1 + \nu) \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{III6}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} (1 - \bar{x}^2) d\bar{x} + \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{II6}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} \bar{x}^2 d\bar{x}], \\
c_{16} &= \frac{8\beta}{\pi r^2} (1 + \nu) \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{III6}^2(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} \sqrt{1 - \bar{x}^2} d\bar{x}, \\
c_{24} &= \frac{64}{\pi r^3} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{I4}(\bar{g}) F_{I2}(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} \sqrt{1 - \bar{x}^2} d\bar{x}, \\
c_{25} &= \frac{16}{\pi r^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{I5}(\bar{g}) F_{I2}(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} \bar{x} d\bar{x}, \\
c_{36} &= \frac{8\beta}{\pi r^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{II3}(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} \bar{x} d\bar{x}, \\
c_{45} &= \frac{16}{\pi r^2} \int_0^{\bar{a}} \bar{\alpha} F_{I4}(\bar{g}) d\bar{\alpha} \int_0^{\bar{b}} \sqrt{1 - \bar{x}^2} d\bar{x},
\end{aligned}$$

gdzie: $\bar{\alpha} = \alpha/r$, $\bar{a} = a/r$, $\bar{b} = b/r$, $\bar{g} = \alpha/h$, $d\bar{\alpha} = d\alpha/r$, $d\bar{x} = dx/r$, $\beta = \beta_x = \beta_y$.

Analizując postać macierzy podatności opracowanego elementu można stwierdzić, że pojawienie się pęknięcia zmienia postać macierzy sztywności w ten sposób, że pojawiają się w niej dodatkowe elementy odpowiedzialne za sprzęganie się drgań giętych ze wzdłużnymi (wyrazy c_{25} , c_{45}) oraz giętych ze skrętnymi (wyrazy c_{16} , c_{36}) a także giętych w obu płaszczyznach (wyraz c_{24}).

Na podstawie wyprowadzonych wzorów na współczynniki dodatkowych podatności oraz wzorów określających macierz podatności dla elementów bez pęknięć otrzymujemy końcową postać macierzy podatności dla elementu z pęknięciem określoną według wzoru (2.6) jako $\mathbf{L} + \mathbf{L}_d$. Macierz tę oznaczmy też jako $\mathbf{L}(6 \times 6)$ (Całkowita podatność dla elementu z pęknięciem $\mathbf{L} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_d$).

$$\begin{aligned}
L(1,1) &= l_e * 3 / (3 * E * j_y) + f_y * l_e / (G * S) + c_{11} \\
L(1,2) &= l_e * 2 / (2 * E * j_y) \\
L(1,6) &= c_{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(2,1) &= L(1,2) \\
L(2,2) &= l_e / (E * j_y) + c_{22} \\
L(2,4) &= c_{24} \\
\\
L(3,3) &= l_e * * 3 / (3 * E * j_x) + f_x * l_e / (G * S) + c_{33} \\
L(3,4) &= l_e * * 2 / (2 * E * j_x) \\
L(3,6) &= c_{36} \\
\\
L(4,2) &= L(2,4) \\
L(4,3) &= L(3,4) \\
L(4,4) &= l_e / (E * j_x) + c_{44} \\
L(4,5) &= c_{45} \\
\\
L(5,2) &= L(2,5) \\
L(5,4) &= L(4,5) \\
L(5,5) &= l_e / (S * E) + c_{55} \\
\\
L(6,1) &= L(1,6) \\
L(6,3) &= L(3,6) \\
L(6,6) &= l_e / (G * j_s) + c_{66}
\end{aligned}$$

Transformacja macierzy sztywności belkowego elementu z pęknięciem do układu obróconego wokół osi wzdluznej z o dowolny kąt α

W ogólnym przypadku w celu dokonania transformacji układów odniesienia macierz sztywności omawianego elementu należy przemnożyć według następującej formuły:

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \tilde{\mathbf{T}}^t \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{T}}, \quad (2.8)$$

gdzie:

\mathbf{K}_e – jest macierzą sztywności w układzie podstawowym;

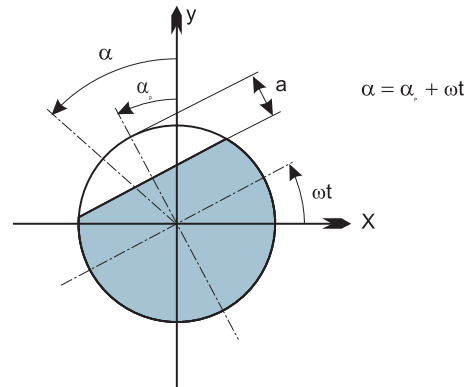
$\tilde{\mathbf{T}}$ – jest macierzą transformacji o postaci:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix},$$

a blok \mathbf{A} ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie α jest kątem opisującym obrót elementu względem płaszczyzny $x - y$ – rys. 2.6.



Rys. 2.6. Element belkowy z pęknięciem obrócony względem osi y o dowolny kąt α_p określający początkowe położenie pęknięcia w płaszczyźnie $x - y$

Kąt ten jest sumą kąta opisującego początkowe położenie pęknięcia względem układu odniesienia α_p i kąta wynikającego z obrotu wału ωt (ω – prędkość wirowania, t – czas).

Stosując proste działania matematyczne na podstawie związku (2.8) otrzymujemy macierz sztywności dla elementu belkowego z pęknięciem obróconym w płaszczyźnie x - y o kąt α_p .

Model zamykania i otwierania się szczeliny

Podczas wirowania wału pęknięcie zmęczeniowe ulega okresowemu zamykaniu i otwieraniu, co w efekcie prowadzi do zmian sztywności układu. Przyjęto dwupołożeniowy model zachowania się pęknięcia – pełne otwarcie lub pełne zamknięcie. Moment otwierania i zamykania pęknięcia jest wyznaczany w oparciu o rzeczywiste odkształcenie wirnika.

Przewidziano dwa przypadki:

1. **Krawędź pęknięcia prostopadła do osi y (pionowej)** – $\alpha_p = 0$. W tym przypadku o chwili otwierania i zamykania pęknięcia decyduje jedynie wartość różnicy kątów obrotu węzłów elementu względem osi x – (φ_x) według zależności:

$$\begin{aligned} \varphi_x(i+1) - \varphi_x(i) > 0 & \quad - \text{pęknięcie otwarte,} \\ \varphi_x(i+1) - \varphi_x(i) \leq 0 & \quad - \text{pęknięcie zamknięte,} \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie $i + 1$ jest numerem węzła oznaczającego koniec elementu, a i jest numerem węzła początku elementu.

Uwaga: Kąt φ_x jest sumą kąta będącego rozwiązaniem zadania kinetostatyki oraz kąta będącego bieżącym rozwiązaniem zadania dynamiki.

2. **Krawędź pęknięcia obrócona względem osi y o kąt α_p .** W tym przypadku o chwili otwarcia i zamknięcia pęknięcia decyduje zarówno kąt obrotu względem osi x (φ_x) jak i kąt obrotu względem osi y (φ_y).

Obliczamy to według zależności:

$$\begin{aligned} \varphi_z(i+1) - \varphi_z(i) > 0 & - \text{pęknięcie otwarte,} \\ \varphi_z(i+1) - \varphi_z(i) \leq 0 & - \text{pęknięcie zamknięte,} \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdzie: $\varphi_z = \varphi_x \cos(\alpha) - \varphi_y \sin(\alpha)$

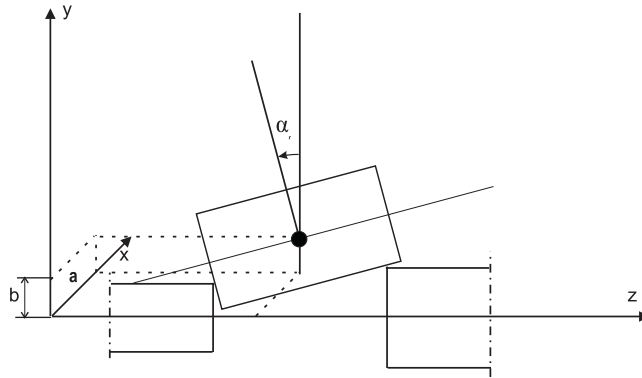
$i+1$ jest numerem węzła oznaczającego koniec elementu, i jest numerem węzła początku elementu natomiast $\alpha = \alpha_p + \omega t$.

Oczywiście obowiązuje uwaga z punktu 1.

W praktycznych obliczeniach należy w każdym kroku kontrolować związki (2.9) i (2.10) i w zależności od wyników budować macierz sztywności danego elementu albo z uwzględnieniem pęknięcia (2.8) albo bez uwzględniania pęknięcia (2.1).

Macierz sztywności elementu belkowego z rozosiowaniem

Element ten służyć ma do modelowania nie współosiowych odcinków wału. Z tego też względu przyjęto, że element może być przesunięty o wielkość „a” wzdłuż osi x i o wielkość „b” wzdłuż osi y w stosunku do układu globalnego oraz może być obrócony o pewien kąt α_r względem osi pionowej. Schemat takiego elementu przedstawia rys. 2.7.



Rys. 2.7. Model elementu belkowego z rozosiowaniem

Powyższe założenie powoduje, że koniecznym jest zapewnienie warunków zgodności elementów przesuniętych i nie przesuniętych. Macierz sztywności takiego elementu jest inna, niż macierz belkowego elementu nie przesuniętego.

W celu zbudowania macierzy sztywności posłużymy się sformułowaniem podatnościowym metody elementów skończonych. Obliczamy ją ze związku:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{TL}^{-1}\mathbf{T}^{-1}, \quad (2.11)$$

gdzie: \mathbf{T} jest macierzą transpozycji zależnego układu sił węzłowych do układu sił niezależnych a \mathbf{L} oznacza macierz podatności elementu.

Macierz transpozycji \mathbf{T} ma podaną już przez nas postać ze związku (2.2).

Natomiast macierz podatności \mathbf{L} można łatwo zbudować wykorzystując do tego celu równanie na energię odkształcenia sprężystego elementu. Pominiemy szczegóły związane z wyprowadzeniem tych związków. Można je znaleźć w literaturze [2.4]÷[2.7], [2.12, 2.37, 2.38].

Końcowa postać macierzy $\mathbf{L}(6 \times 6)$ jest następująca (elementy nie wyszczególnione są zerami):

$$\begin{aligned}
L(1,1) &= l_e * 3 / (3 * E * j_y) + f_y * l_e / (G * S) + l_e * b_z * 2 / (G * j_s) \\
L(1,2) &= l_e * 2 / (2 * E * j_y) \\
L(1,3) &= -l_e * a_z * b_z * \cos(\alpha_r) / (G * j_s) + l_e * 2 * a_z * \sin(\alpha_r) / (2 * E * j_y) \\
L(1,5) &= l_e * 2 * a_z * \cos(\alpha_r) / (2 * E * j_y) + l_e * a_z * b_z * \sin(\alpha_r) / (G * j_s) \\
L(1,6) &= l_e * b_z / (G * j_s) \\
\\
L(2,2) &= l_e / (E * j_y) \\
L(2,3) &= l_e * a_z * \sin(\alpha_r) / (E * j_y) \\
L(2,5) &= l_e * a_z * \cos(\alpha_r) / (E * j_y) \\
\\
L(3,3) &= l_e * 3 / (3 * E * j_x) + f_y * l_e * \cos(\alpha_r) * 2 / (G * S) + \\
&\quad l_e * a_z * 2 * \cos(\alpha_r) * 2 / (G * j_s) + l_e * \sin(\alpha_r) * 2 / (E * S) + \\
&\quad l_e * a_z * 2 * \sin(\alpha_r) * 2 / (E * j_y) + l_e * b_z * 2 * \sin(\alpha_r) * 2 \\
&\quad / (E * j_x) + l_e * 2 * b_z * \sin(\alpha_r) / (E * j_x) \\
L(3,4) &= l_e * 2 / (2 * E * j_x) + l_e * b_z * \sin(\alpha_r) / (E * j_x) \\
L(3,5) &= l_e * 2 * b_z * \cos(\alpha_r) / (2 * E * j_x) - l_e * a_z * 2 * \sin(\alpha_r) * \\
&\quad \cos(\alpha_r) / (G * j_s) + l_e * b_z * 2 * \sin(\alpha_r) * \cos(\alpha_r) / \\
&\quad (G * j_s) + l_e * a_z * 2 * \sin(\alpha_r) * \cos(\alpha_r) / (E * j_y) - \\
&\quad f_y * l_e * \sin(\alpha_r) * \cos(\alpha_r) / (G * S) + l_e * \sin(\alpha_r) * \cos(\alpha_r) / (E * S) \\
L(3,6) &= -l_e * a_z * \cos(\alpha_r) / (G * j_s) \\
\\
L(4,4) &= l_e / (E * j_x) \\
L(4,5) &= l_e * b_z * \cos(\alpha_r) / (E * j_x) \\
\\
L(5,5) &= l_e * \cos(\alpha_r) * 2 / (E * S) + l_e * a_z * 2 * \cos(\alpha_r) * 2 / (E * j_y) + \\
&\quad l_e * b_z * 2 * \cos(\alpha_r) * 2 / (E * j_x) + l_e * a_z * 2 * \sin(\alpha_r) * 2 / \\
&\quad (G * j_s) + f_y * l_e * \sin(\alpha_r) * 2 / (G * S) \\
L(5,6) &= l_e * a_z * \sin(\alpha_r) / (G * j_s) \\
\\
L(6,6) &= l_e / (G * j_s)
\end{aligned}$$

Macierz \mathbf{L} jest macierzą symetryczną czyli:

$$L(4,3) = L(3,4)$$

$$\begin{aligned}
L(6,3) &= L(3,6) \\
L(5,2) &= L(2,5) \\
L(5,1) &= L(1,5) \\
L(2,1) &= L(1,2) \\
L(3,1) &= L(1,3) \\
L(6,1) &= L(1,6) \\
L(3,2) &= L(2,3) \\
L(5,3) &= L(3,5) \\
L(5,4) &= L(4,5) \\
L(6,5) &= L(5,6),
\end{aligned}$$

gdzie:

α_r – jest kątem przesunięcia względem osi pionowej;

$$a_z = a * \cos(\omega t) - b * \sin(\omega t);$$

$$b_z = a * \sin(\omega t) - b * \cos(\omega t);$$

ω – jest prędkością kątową wału; t – oznacza czas; a, b – są to stałe opisujące rozosiowanie wału w chwili czasu $t = 0$ – rys. 2.7.

Pozostałe oznaczenia takie jak przy budowaniu poprzednich macierzy podatności. Zauważmy, że ponieważ a_z i b_z są funkcjami kąta obrotu wału muszą być naliczane w każdym kroku czasowym. Tak więc macierz sztywności elementu belkowego z rozosiowaniem jest modyfikowana w każdym kroku czasowym.

Mając macierze \mathbf{T} i \mathbf{L} na podstawie związku (2.11) budujemy macierz sztywności elementu rozosiowanego.

Macierz bezwładności elementów belkowych wału wirnika

Macierz bezwładności elementu $\mathbf{M}_e(12 \times 12)$ zarówno dla modelu Bernoulliego-Eulera jak i Timoshenko dla wszystkich rodzajów elementów belkowych wału (bez pęknięć i rozosiowań, elementów pękniętych oraz elementów rozosiowanych) przyjmujemy w tej samej postaci [2.3, 2.7, 2.10, 2.35, 2.36, 2.38].

Jawną postać tych macierzy przedstawimy w postaci równań na poszczególne elementy macierzy $\mathbf{M}_e(12,12)$. Elementy nie wyszczególnione we wzorach przyjmują wartości zerowe.

$$M_e(1,1) = \rho * (13 * l_e * l_e * S + 42 * j_y) / (35 * l_e)$$

$$M_e(1,2) = \rho * (11 * l_e * l_e * S / 210 + j_y / 10)$$

$$M_e(1,7) = 3 * \rho * (3 * l_e * l_e * S - 28 * j_y) / (70 * l_e)$$

$$M_e(1,8) = \rho * (-13 * l_e * l_e * S / 420 + j_y / 10)$$

$$M_e(2,1) = M_e(1,2)$$

$$M_e(2,2) = \rho * (l_e * 3 * S / 105 + 2 * l_e * j_y / 15)$$

$$M_e(2,7) = \rho * (13 * l_e * l_e * S / 420 - j_y / 10)$$

$$M_e(2,8) = \rho * (-l_e * 3 * S / 140 - l_e * j_y / 30)$$

$$M_e(3,3) = \rho * (13 * l_e * l_e * S + 42 * j_x) / (35 * l_e)$$

$$M_e(3,4) = \rho * (11 * l_e * l_e * S / 210 + j_x / 10)$$

$$M_e(3,9) = 3 * \rho * (3 * l_e * l_e * S - 28 * j_x) / (70 * l_e)$$

$$M_e(3,10) = \rho * (-13 * l_e * l_e * S / 420 + j_x / 10)$$

$$M_e(4,3) = M_e(3,4)$$

$$M_e(4,4) = \rho * (l_e * 3 * S / 105 + 2 * l_e * j_x / 15)$$

$$M_e(4,9) = \rho * (13 * l_e * l_e * S / 420 - j_x / 10)$$

$$M_e(4,10) = \rho * (-l_e * 3 * S / 140 - l_e * j_x / 30)$$

$$M_e(5,5) = \rho * l_e * S / 3$$

$$M_e(5,11) = \rho * l_e * S / 6$$

$$M_e(6,6) = \rho * l_e * j_s / 3$$

$$M_e(6,12) = \rho * l_e * j_s / 6$$

$$M_e(7,1) = M_e(1,7)$$

$$M_e(7,2) = M_e(2,7)$$

$$M_e(7,7) = \rho * (13 * l_e * l_e * S + 42 * j_y) / (35 * l_e)$$

$$M_e(7,8) = \rho * (-11 * l_e * l_e * S / 210 - j_y / 10)$$

$$M_e(8,1) = M_e(1,8)$$

$$M_e(8,2) = M_e(2,8)$$

$$M_e(8,7) = M_e(7,8)$$

$$M_e(8,8) = \rho * (l_e * 3 * S / 105 + 2 * l_e * j_y / 15)$$

$$M_e(9,3) = M_e(3,9)$$

$$M_e(9,4) = M_e(4,9)$$

$$M_e(9,9) = \rho * (13 * l_e * l_e * S + 42 * j_x) / (35 * l_e)$$

$$M_e(9,10) = \rho * (-11 * l_e * l_e * S / 210 - j_x / 10)$$

$$M_e(10,3) = M_e(3,10)$$

$$M_e(10,4) = M_e(4,10)$$

$$M_e(10,9) = M_e(9,10)$$

$$M_e(10,10) = \rho * (l_e * 3 * S / 105 + 2 * l_e * j_x / 15)$$

$$M_e(11,5) = M_e(5,11)$$

$$M_e(11,11) = \rho * l_e * S / 3$$

$$M_e(12,6) = M_e(6,12)$$

$$M_e(12,12) = \rho * l_e * j_s / 3$$

gdzie:

- l_e – długość elementu;
 S – pole przekroju poprzecznego;
 j_x – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi x układu;
 j_y – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi y układu;
 j_s – moment bezwładności przekroju poprzecznego na skręcenie względem osi z układu, stały, niezależny od kąta obrotu;
 ρ – gęstość materiału z jakiego wykonany jest wirnik.

Macierz tłumienia elementów belkowych

Macierz tłumienia \mathbf{D}_e dla elementów belkowych modelujących wał wirnika obliczamy jako kombinację macierzy bezwładności \mathbf{M}_e i sztywności \mathbf{K}_e według następującego wzoru [2.3, 2.7, 2.8, 2.10, 2.35, 2.36, 2.38]:

$$\mathbf{D}_e = \alpha * \mathbf{M}_e + \beta * \mathbf{K}_e,$$

gdzie:

- α, β – współczynniki tłumienia materiałowego;
 \mathbf{M}_e – macierz bezwładności elementu;
 \mathbf{K}_e – macierz sztywności elementu;
 \mathbf{D}_e – macierz tłumienia elementu.

Wielkości α i β mogą przybierać wartości [2.8]:

α : 1; 10

β : 0,0001; 0,001; 0,01

zależnie od analizowanego przypadku i rodzaju materiału.

Macierz tłumienia pochodząca od sił Coriolisa

Macierz tłumienia pochodząca od sił Coriolisa $\mathbf{D}_{ce}(\mathbf{12} \times \mathbf{12})$ budowana jest dla wszystkich elementów belkowych modelujących wał wirnika według następujących wzorów [2.4]÷[2.7], [2.10, 2.35, 2.36, 2.38] (elementy nie wyszczególnione są zerami):

$$\begin{aligned}
 D_{ce}(1, 3) &= -13 * S * l_e / 35 \\
 D_{ce}(1, 4) &= -11 * S * l_e * *2 / 210 \\
 D_{ce}(1, 9) &= -9 * S * l_e / 70 \\
 D_{ce}(1, 10) &= 13 * S * l_e * *2 / 420 \\
 \\
 D_{ce}(2, 3) &= -11 * S * l_e * *2 / 210 \\
 D_{ce}(2, 4) &= -S * l_e * *3 / 105 \\
 D_{ce}(2, 9) &= -13 * S * l_e * *2 / 420 \\
 D_{ce}(2, 10) &= S * l_e * *3 / 140
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ce}(3, 1) &= 13 * S * l_e / 35 \\ D_{ce}(3, 2) &= 11 * S * l_e ** 2 / 210 \\ D_{ce}(3, 7) &= 9 * S * l_e / 70 \\ D_{ce}(3, 8) &= -13 * S * l_e ** 2 / 420 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ce}(4, 1) &= 11 * S * l_e ** 2 / 210 \\ D_{ce}(4, 2) &= S * l_e ** 3 / 105 \\ D_{ce}(4, 7) &= 13 * S * l_e ** 2 / 420 \\ D_{ce}(4, 8) &= -S * l_e ** 3 / 140 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ce}(7, 3) &= -9 * S * l_e / 70 \\ D_{ce}(7, 4) &= -13 * S * l_e ** 2 / 420 \\ D_{ce}(7, 9) &= -13 * S * l_e / 35 \\ D_{ce}(7, 10) &= 11 * S * l_e ** 2 / 210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ce}(8, 3) &= 13 * S * l_e ** 2 / 420 \\ D_{ce}(8, 4) &= S * l_e ** 3 / 140 \\ D_{ce}(8, 9) &= 11 * S * l_e ** 2 / 210 \\ D_{ce}(8, 10) &= -S * l_e ** 3 / 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ce}(9, 1) &= 9 * S * l_e / 70 \\ D_{ce}(9, 2) &= 13 * S * l_e ** 2 / 420 \\ D_{ce}(9, 7) &= 13 * S * l_e / 35 \\ D_{ce}(9, 8) &= -11 * S * l_e ** 2 / 210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ce}(10, 1) &= -13 * S * l_e ** 2 / 420 \\ D_{ce}(10, 2) &= -S * l_e ** 3 / 140 \\ D_{ce}(10, 7) &= -11 * S * l_e ** 2 / 210 \\ D_{ce}(10, 8) &= S * l_e ** 3 / 105 \end{aligned}$$

Po obliczeniu wszystkie elementy macierzy przemnażamy przez $wsk = 2 * \rho * \omega$ czyli $\mathbf{D}_{ce}(I, J) = wsk * \mathbf{D}_{ce}(I, J)$; $I = 1, 12$; $J = 1, 12$.

Oznaczenia:

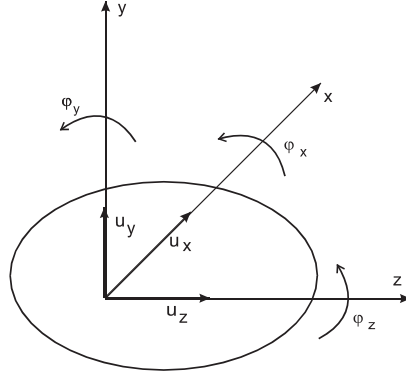
- l_e – długość elementu;
- ω – prędkość kątowna wirowania;
- ρ – gęstość materiału;
- S – pole przekroju poprzecznego elementu.

2.1.2.2 Dyski sztywne

Macierz bezwładności dysku sztywnego

Do modelowania dysków zastosowano bryły nieodkształcalne. Przyjęto, że sztywne dyski posiadają sześć stopni swobody: 3 translacyjne wzdłuż osi x, y, z oraz 3 obrotowe względem tych samych osi zgodnie z numeracją dotyczącą całego modelu. (Dysk sztywny przyporządkowany jest do jednego numeru węzła na wale).

Model dysku sztywnego wraz z układem osi współrzędnych i stopniami swobody przedstawiono na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Model dysku sztywnego

Macierz bezwładności \mathbf{M}_{de} (6×6) przyjmuje postać [2.4]÷[2.7], [2.10, 2.35, 2.36, 2.38]:

(elementy nie wyszczególnione są zerami):

$$\begin{aligned} M_{de}(1, 1) &= m_d, \\ M_{de}(2, 2) &= j_{my}, \\ M_{de}(3, 3) &= m_d, \\ M_{de}(4, 4) &= j_{mx}, \\ M_{de}(5, 5) &= m_d, \\ M_{de}(6, 6) &= j_{mz}, \end{aligned}$$

gdzie:

- m_d – masa dysku;
- j_{mx} – masowy moment bezwładności dysku względem osi x ;
- j_{my} – masowy moment bezwładności dysku względem osi y ;
- j_{mz} – masowy moment bezwładności dysku względem osi z .
- $m_d = \rho * \pi * (s_{dz} * *2 - s_{dw} * *2) * g_d / 4$
- g_d – grubość dysku;
- s_{dw} – średnica wewnętrzna dysku;
- s_{dz} – średnica zewnętrzna dysku;
- ρ – gęstość materiałowa dla dysków.

W przypadku dysku w kształcie idealnego „krażka” możemy przyjąć:

$$\begin{aligned} j_t &= 0.5 * m_d * ((s_{dz}/2) * *2 - (s_{dw}/2) * *2), \\ j_{mx} &= j_t, \\ j_{my} &= j_t, \\ j_{mz} &= j_t. \end{aligned}$$

Macierz tłumienia (macierz giroskopowa)

Jak już wspominaliśmy dysk sztywny modelowany jest przez 6 stopni swobody. Budujemy macierz $\mathbf{D}_{gd}(6 \times 6)$ według następującego algorytmu [2.4]÷[2.7], [2.10, 2.35, 2.36, 2.38]:

(elementy nie wyszczególnione są zerami)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{gd}(2, 4) &= -\omega * j_b \\ \mathbf{D}_{gd}(4, 2) &= \omega * j_b \end{aligned}$$

gdzie:

ω – prędkość kątowna wirowania;

j_b – masowy biegunowy moment bezwładności a

j_b jest obliczane według wzoru:

$$j_b = m_d * ((r_{dz} * *2/4 - r_{dw} * *2/4) + (g_d * *2)/12),$$

gdzie:

$$m_d = \rho * \pi * (s_{dz} * *2 - s_{dw} * *2) * g_d/4;$$

g_d – grubość dysku; grubość dysku

s_{dw} – średnica wewnętrzna dysku;

s_{dz} – średnica zewnętrzna dysku;

$$r_{dz} = s_{dz}/2;$$

$$r_{dw} = s_{dw}/2;$$

ρ – gęstość materiałowa dla dysków.

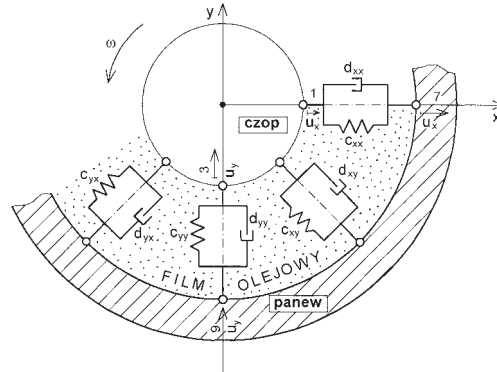
2.1.2.3 Model MES poprzecznych łożysk ślizgowych

W niniejszym podrozdziale zakładamy, iż znamy współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego. W rzeczywistości ich określenie stanowi odrębne i bardzo złożone zagadnienia (patrz kolejne podrozdziały). Na razie przedstawimy prosty sposób ich wkomponowania w ogólną strukturę modelu MES linii wirników.

Dla każdej podpory poprzeczne łożysko ślizgowe charakteryzowane jest przez dwa węzły: węzeł przedstawiający panew oraz węzeł określający czop. Węzeł czopa łożyska jest węzłem wspólnym z węzłem odpowiedniego elementu belkowego wału wirnika (rys. 2.2, rys. 2.9) [2.2].

W przyjętym modelu panew łożyska jest masą skupioną i może wykonywać tylko drgania poprzeczne tzn. przemieszczenie w kierunku x oraz przemieszczenie w kierunku y . Wobec powyższego do zamodelowania własności łożyska zastosowany został element punktowy o dwóch węzłach i dwóch stopniach swobody w węźle a mianowicie: przemieszczenie w kierunku osi $x - u_x$ i przemieszczenie w kierunku osi $y - u_y$. Stosując przyjętą wcześniej konwencję kierunków taką jak dla elementu z rys. 2.3 odpowiada to kierunkom: 1, 3 oraz 7, 9.

Pomijamy ewentualne oddziaływania momentów skrętnych to znaczy zaniebujemy obroty $-\varphi_x$ i φ_y . Założono także pełną równoległość osi panwi do osi czopa, co oznacza brak możliwości przenoszenia przez film olejowy sił wzdłużnych. Oznacza to brak drgań osiowych w kierunku osi $z - u_z$ oraz drgań skrętnych $-\varphi_z$.



Rys. 2.9. Model MES łożyska ślizgowego. Punktowy element skończony w lokalnym układzie odniesienia

Tak więc w przyjętym modelu łożyska faktycznie w węźle oznaczającym czop lub panew mamy do czynienia tylko z dwoma stopniami swobody.

W dalszych rozważaniach budując macierze sztywności i tłumienia łożysk przyjmujemy jednakże ich wymiar odpowiadający 6 stopniom swobody, podobnie jak dla elementów belkowych. Wynika to wyłącznie z konieczności uzyskania kompatybilności wszystkich macierzy.

Węzeł oznaczający czop łożyska jest wspólny z węzłem odpowiedniego elementu belkowego wału wirnika, posiadającym oczywiście sześć stopni swobody. Przy analizie pracy łożysk te dodatkowe stopnie swobody są po prostu pomijane.

Macierz sztywności i tłumienia poprzecznych łożysk ślizgowych

Poszczególne wyrazy macierzy sztywności \mathbf{K}_{le} (12×12) (w układzie lokalnym) charakteryzującej poprzeczne łożyska ślizgowe, obliczane są na podstawie współczynników sztywności dla filmu olejowego według następujących wzorów: (elementy nie wyszczególnione są zerami)

$$\begin{aligned}
 K_{le}(1, 1) &= -c_{xx} \\
 K_{le}(1, 3) &= -c_{xy} \\
 K_{le}(1, 7) &= c_{xx} \\
 K_{le}(1, 9) &= c_{xy} \\
 \\
 K_{le}(3, 1) &= -c_{yx} \\
 K_{le}(3, 3) &= -c_{yy} \\
 K_{le}(3, 7) &= c_{yx} \\
 K_{le}(3, 9) &= c_{yy} \\
 \\
 K_{le}(7, 1) &= c_{xx}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
K_{le}(7, 3) &= c_x \\
K_{le}(7, 7) &= -c_{xx} \\
K_{le}(7, 9) &= -c_{xy} \\
\\
K_{le}(9, 1) &= c_{yx} \\
K_{le}(9, 3) &= c_{yy} \\
K_{le}(9, 7) &= -c_{yx} \\
K_{le}(9, 9) &= -c_{yy}
\end{aligned}$$

gdzie:

c_{ik} – współczynniki sztywności filmu olejowego wg definicji:

$$c_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial x}; \quad c_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial y}; \quad c_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad c_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y}, \quad (2.13)$$

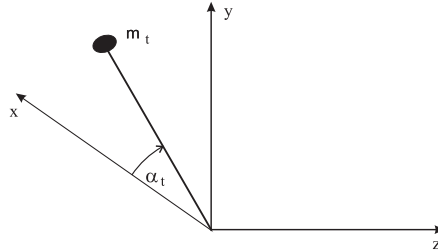
gdzie pierwszy wskaźnik oznacza kierunek siły reakcji filmu F , natomiast drugi wskaźnik jest kierunkiem dla przemieszczeń (x lub y).

W analogiczny sposób budujemy macierz tłumienia $\mathbf{D}_{le}(\mathbf{12} \times \mathbf{12})$ z tym, że zamiast współczynników sztywności c_{ik} podstawiamy współczynniki tłumienia d_{ik} czyli: $d_{xx}, d_{xy}, d_{yx}, d_{yy}$.

Obliczanie współczynników sztywności c_{ik} i tłumienia d_{ik} stanowi odrębne zagadnienie. Współczynniki te obliczane są w oparciu o złożony, elastodiatermiczny model cieplny łożyska a następnie, w zagadnieniach dynamiki, są one modyfikowane w każdym kroku czasowym procedury iteracyjnej [2.1, 2.2, 2.11, 2.39, 2.40].

2.1.2.4 Tłumik zewnętrzny mocowany do panwi

Modelowany tłumik drgań przedstawiono na rys. 2.10.



Rys. 2.10. Model tłumika zewnętrznego

Składa się on z pręta na końcu którego mocowana jest masa. Podstawowym założeniem przyjętym przy budowie macierzy charakterystycznych tłumika drgań jest to, iż tłumik ten będzie mocowany do panwi łożyskowych. Wynika z tego, że możliwe będą jedynie drgania tłumika w płaszczyźnie $x - y$, oraz, że jeden z jego końców będzie wykonywał takie same ruchy jak panew (jedynie przemieszczenia w kierunku osi x i y , bez możliwości obrotów).

Macierz sztywności zewnętrznego tłumika drgań mocowanego do panwi

Macierz sztywności tłumika $\mathbf{K}_{et}(12 \times 12)$ w układzie lokalnym przedstawia się następująco [2.3] (wyrazy nie wyszczególnione są zerami):

$$K_{et}(1, 1) = 12 * j_y * E / (l_t * *3)$$

$$K_{et}(1, 2) = 6 * j_y * E / (l_t * *2)$$

$$K_{et}(1, 7) = -12 * j_y * E / (l_t * *3)$$

$$K_{et}(1, 8) = 6 * j_y * E / (l_t * *2)$$

$$K_{et}(2, 1) = K_{et}(1, 2)$$

$$K_{et}(2, 2) = 4 * j_y * E / l_t$$

$$K_{et}(2, 7) = -6 * j_y * E / (l_t * *2)$$

$$K_{et}(2, 8) = 2 * j_y * E / l_t$$

$$K_{et}(3, 3) = 12 * j_x * E / (l_t * *3)$$

$$K_{et}(3, 4) = 6 * j_x * E / (l_t * *2)$$

$$K_{et}(3, 9) = -12 * j_x * E / (l_t * *3)$$

$$K_{et}(3, 10) = 6 * j_x * E / (l_t * *2)$$

$$K_{et}(4, 3) = K_{et}(3, 4)$$

$$K_{et}(4, 4) = 4 * j_x * E / l_t$$

$$K_{et}(4, 9) = -6 * j_x * E / (l_t * *2)$$

$$K_{et}(4, 10) = 2 * j_x * E / l_t$$

$$K_{et}(5, 5) = E * a_t / l_t$$

$$K_{et}(5, 11) = -E * a_t / l_t$$

$$K_{et}(6, 6) = j_s * E / (2 * (1.0 + \nu) * l_t)$$

$$K_{et}(6, 12) = -j_s * E / (2 * (1.0 + \nu) * l_t)$$

$$K_{et}(7, 1) = K_{et}(1, 7)$$

$$K_{et}(7, 2) = K_{et}(2, 7)$$

$$K_{et}(7, 7) = 12 * j_y * E / (l_t * *3)$$

$$K_{et}(7, 8) = -6 * j_y * E / (l_t * *2)$$

$$K_{et}(8, 1) = K_{et}(1, 8)$$

$$K_{et}(8, 2) = K_{et}(2, 8)$$

$$K_{et}(8, 7) = K_{et}(7, 8)$$

$$K_{et}(8, 8) = 4 * j_y * E / l_t$$

$$K_{et}(9, 3) = K_{et}(3, 9)$$

$$K_{et}(9, 4) = K_{et}(4, 9)$$

$$K_{et}(9, 9) = 12 * j_x * E / (l_t * *3)$$

$$K_{et}(9, 10) = -6 * j_x * E / (l_t * * 2)$$

$$K_{et}(10, 3) = K_{et}(3, 10)$$

$$K_{et}(10, 4) = K_{et}(4, 10)$$

$$K_{et}(10, 9) = K_{et}(9, 10)$$

$$K_{et}(10, 10) = 4 * j_x * E / l_t$$

$$K_{et}(11, 5) = K_{et}(5, 11)$$

$$K_{et}(11, 11) = E * a_t / l_t$$

$$K_{et}(12, 6) = K_{et}(6, 12)$$

$$K_{et}(12, 12) = j_s * E / (2 * (1.0 + \nu) * l_t),$$

gdzie:

l_t – długość pręta tłumika;

a_t – pole przekroju poprzecznego pręta tłumika;

j_x – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi x układu;

j_y – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi y układu;

j_s – moment bezwładności przekroju poprzecznego na skręcenie względem osi z układu;

E – moduł Younga dla materiału z jakiego wykonany jest tłumik;

ν – liczba Poissona.

Należy zauważyć, że przy przejściu do układu globalnego trzeba przemnożyć macierz \mathbf{K}_{et} przez macierz transformacji układu współrzędnych Θ (12×12 ($\cos(\alpha_t)$ – na głównej przekątnej, pozostałe wyrazy są zerami) według wzoru:

$$\mathbf{K}_t = \Theta^t * \mathbf{K}_{et} * \Theta, \quad (2.14)$$

gdzie:

$$\Theta(1, 1) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(2, 2) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(3, 3) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(4, 4) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(5, 5) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(6, 6) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(7, 7) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(8, 8) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(9, 9) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(10, 10) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(11, 11) = \cos(\alpha_t)$$

$$\Theta(12, 12) = \cos(\alpha_t)$$

(2.15)

natomiast α_t – oznacza kąt ustawienia pręta tłumika w stosunku do osi x – rys. 2.10.

Macierz bezwładności zewnętrznego tłumika drgań mocowanego do panwi

Macierz bezwładności tłumika $\mathbf{M}_{et}(\mathbf{12} \times \mathbf{12})$ w układzie lokalnym przedstawia się następująco [2.3] (wyrazy nie wyszczególnione są zerami):

$$\begin{aligned} M_{et}(1, 1) &= \rho * (13 * l_t * l_t * a_t + 42 * j_y) / (35 * l_t) \\ M_{et}(1, 2) &= \rho * (11 * l_t * l_t * a_t / 210 + j_y / 10) \\ M_{et}(1, 7) &= 3 * \rho * (3 * l_t * l_t * a_t - 28 * j_y) / (70 * l_t) \\ M_{et}(1, 8) &= \rho * (-13 * l_t * l_t * a_t / 420 + j_y / 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{et}(2, 1) &= M_{et}(1, 2) \\ M_{et}(2, 2) &= \rho * (l_t * * 3 * a_t / 105 + 2 * l_t * j_y / 15) \\ M_{et}(2, 7) &= \rho * (13 * l_t * l_t * a_t / 420 - j_y / 10) \\ M_{et}(2, 8) &= \rho * (-l_t * * 3 * a_t / 140 - l_t * j_y / 30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{et}(3, 3) &= \rho * (13 * l_t * l_t * a_t + 42 * j_x) / (35 * l_t) \\ M_{et}(3, 4) &= \rho * (11 * l_t * l_t * a_t / 210 + j_x / 10) \\ M_{et}(3, 9) &= 3 * \rho * (3 * l_t * l_t * a_t - 28 * j_x) / (70 * l_t) \\ M_{et}(3, 10) &= \rho * (-13 * l_t * l_t * a_t / 420 + j_x / 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{et}(4, 3) &= M_{et}(3, 4) \\ M_{et}(4, 4) &= \rho * (l_t * * 3 * a_t / 105 + 2 * l_t * j_x / 15) \\ M_{et}(4, 9) &= \rho * (13 * l_t * l_t * a_t / 420 - j_x / 10) \\ M_{et}(4, 10) &= \rho * (-l_t * * 3 * a_t / 140 - l_t * j_x / 30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{et}(5, 5) &= \rho * l_t * a_t / 3 \\ M_{et}(5, 11) &= \rho * l_t * a_t / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{et}(6, 6) &= \rho * l_t * j_s / 3 \\ M_{et}(6, 12) &= \rho * l_t * j_s / 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{et}(7, 1) &= M_{et}(1, 7) \\ M_{et}(7, 2) &= M_{et}(2, 7) \\ M_{et}(7, 7) &= \rho * (13 * l_t * l_t * a_t + 42 * j_y) / (35 * l_t) + m_t \\ M_{et}(7, 8) &= \rho * (-11 * l_t * l_t * a_t / 210 - j_y / 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{et}(8, 1) &= M_{et}(1, 8) \\ M_{et}(8, 2) &= M_{et}(2, 8) \\ M_{et}(8, 7) &= M_{et}(7, 8) \\ M_{et}(8, 8) &= \rho * (l_t * * 3 * a_t / 105 + 2 * l_t * j_y / 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{et}(9, 3) &= M_{et}(3, 9) \\
M_{et}(9, 4) &= M_{et}(4, 9) \\
M_{et}(9, 9) &= \rho * (13 * l_t) * l_t * a_t + 42 * j_x / (35 * l_t) + m_t \\
M_{et}(9, 10) &= \rho * (-11 * l_t * l_t * a_t / 210 - j_x / 10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{et}(10, 3) &= M_{et}(3, 10) \\
M_{et}(10, 4) &= M_{et}(4, 10) \\
M_{et}(10, 9) &= M_{et}(9, 10) \\
M_{et}(10, 10) &= \rho * (l_t * 3 * a_t / 105 + 2 * l_t * j_x / 15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{et}(11, 5) &= M_{et}(5, 11) \\
M_{et}(11, 11) &= \rho * l_t * a_t / 3 + m_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{et}(12, 6) &= M_{et}(6, 12) \\
M_{et}(12, 12) &= \rho * l_t * j_s / 3,
\end{aligned}$$

gdzie:

- a_t – pole przekroju poprzecznego pręta tłumika;
- m_t – masa skupiona na końcu tłumika;
- ρ – gęstość materiału tłumika;
- l_t – długość pręta tłumika o numerze n ;
- j_x – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi x układu;
- j_y – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi y układu;
- j_s – moment bezwładności przekroju poprzecznego na skręcenie względem osi z układu.

Następnie wszystkie wyrazy tak określonej macierzy należy przemnożyć przez następujący iloczyn: $\rho * l_t * a_t$ czyli otrzymamy:

$$\mathbf{M}_{et}(I, J) = \rho * l_t * a_t * \mathbf{M}_{et}(I, J), \quad I, J = 1, 12. \quad (2.16)$$

Obowiązuje oczywiście uwaga o transformacji układu lokalnego (analogicznie jak dla macierzy sztywności) czyli w efekcie końcowym otrzymujemy:

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{\Theta}^t * \mathbf{M}_{et} * \mathbf{\Theta},$$

gdzie: $\mathbf{\Theta}$ – opisuje wzór (2.15).

2.1.2.5 Model konstrukcji podpierającej

Podobnie jak w przypadku łożysk ślizgowych zakładamy, iż znane są nam już charakterystyki masowo-tłumiąco-sztywnościowe konstrukcji podpierającej. Sposób ich wyznaczenia, zwłaszcza w przypadku analizy nieliniowej, to bardzo złożona procedura. Pisaliśmy o tym szczegółowo w rozdziale 1. Z punktu widzenia modelu MES linii wirników uwzględnienie współczynników tłumienia, sztywności i mas

konstrukcji podpierającej (skoro już je wyznaczyliśmy) nie nastęrcza większych trudności i jest kwestią dość rutynowego postępowania.

Dla każdej podpory konstrukcję podpierającą charakteryzują dwa węzły: węzeł przedstawiający panew oraz węzeł określający umocowanie do podłoża (unieruchomiony) – rys. 2.2 [2.2].

Strukturę lokalnych macierzy sztywności, tłumienia i bezwładności konstrukcji podpierającej przedstawimy na przykładzie współczynników sztywności i tłumienia odnoszących się do współczynników głównych (punktowych) i skośnych a nie do przeniesionych. Oznacza to, iż na obecnym etapie pominiemy występujące sprzężenia pomiędzy podporami. Sprzężenia te omówimy przy okazji budowy macierzy charakterystycznych w układzie globalnym. Dodatkowe macierze charakteryzujące same sprzężenia będą miały podobną strukturę lokalną, chociaż w układzie globalnym macierze charakteryzujące własności dynamiczne całej konstrukcji podpierającej będą miały zupełnie inną postać.

Macierz sztywności i tłumienia

Poszczególne wyrazy macierzy sztywności $\mathbf{K}_{fe}(\mathbf{12} \times \mathbf{12})$ charakteryzującej konstrukcję podpierającą, obliczane są na podstawie współczynników sztywności wczytywanych do obliczeń jako dane wejściowe wzięte z pomiarów eksperymentalnych lub odrębnych obliczeń konstrukcji podpierającej.

Tworzymy tę macierz w sposób analogiczny jak macierz sztywności poprzecznych łożysk ślizgowych, tylko miejsce współczynników sztywności filmu olejowego zajmują współczynniki sztywności konstrukcji podpierającej (patrz związki (2.13)).

Poszczególne wyrazy macierzy sztywności $\mathbf{K}_{fe}(\mathbf{12} \times \mathbf{12})$ przedstawiają się więc następująco (elementy nie wyszczególnione są zerami):

$$\begin{aligned} K_{fe}(1, 1) &= -fk_{xx} \\ K_{fe}(1, 3) &= -fk_{xy} \\ K_{fe}(1, 7) &= fk_{xx} \\ K_{fe}(1, 9) &= fk_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{fe}(3, 1) &= -fk_{yx} \\ K_{fe}(3, 3) &= -fk_{yy} \\ K_{fe}(3, 7) &= fk_{yx} \\ K_{fe}(3, 9) &= fk_{yy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{fe}(7, 1) &= fk_{xx} \\ K_{fe}(7, 3) &= fk_{xy} \\ K_{fe}(7, 7) &= -fk_{xx} \\ K_{fe}(7, 9) &= -fk_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{fe}(9, 1) &= fk_{yx} \\ K_{fe}(9, 3) &= fk_{yy} \\ K_{fe}(9, 7) &= -fk_{yx} \end{aligned}$$

$$K_{fe}(9, 9) = -fk_{yy}$$

gdzie: fk_{ij} – odpowiednie współczynniki sztywności konstrukcji podpierającej dla kolejnych podpór.

W analogiczny sposób tworzymy macierz tłumienia $\mathbf{D}_{fe}(\mathbf{12} \times \mathbf{12})$ z tym, że zamiast współczynników sztywności fk_{ij} podstawiamy współczynniki tłumienia fd_{ij} czyli: $fd_{xx}, fd_{xy}, fd_{yx}, fd_{yy}$.

Macierz bezwładności

Macierz bezwładności konstrukcji podpierającej $\mathbf{M}_{ef}(\mathbf{12} \times \mathbf{12})$ modelujemy wykorzystując masy m_p związane z procesem drgań dla każdej podpory [2.2].

Postać tej macierzy jest następująca (elementy nie określone są zerami):

$$\begin{aligned} M_{ef}(1, 1) &= m_p \\ M_{ef}(3, 3) &= m_p \\ M_{ef}(7, 7) &= m_p \\ M_{ef}(9, 9) &= m_p \end{aligned}$$

gdzie: m_p – masa związana z procesem drgań podpory.

2.1.3 Macierze charakterystyczne w układzie globalnym

Wymiar macierzy globalnych w równaniu (1.5) z rozdziału 1 oraz na rys. 2.1 w sposób oczywisty zależy od przyjętej dyskretyzacji MES całego układu wirnika-podpory. Jeżeli założymy, że dyskretyzację tę wyznaczają następujące parametry:

- l_{eb} – ilość elementów belkowych użytych dla dyskretyzacji wału wirnika;
 - l_p – ilość podpór;
 - l_t – ilość tłumików zewnętrznych przytwierdzonych do panwi;
 - l_u – ilość uszczelnień labiryntowych,
- to wymiar macierzy globalnych wyniesie:

$$\mathbf{M}(l_{ss} \times l_{ss}), \quad \mathbf{D}(l_{ss} \times l_{ss}), \quad \mathbf{K}(l_{ss} \times l_{ss}), \quad \mathbf{P}(l_{ss}); \quad \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}(l_{ss}),$$

gdzie l_{ss} oznacza ilość stopni swobody układu określoną następującą zależnością:

$$l_{ss} = (l_{eb} + 1) * 6 + l_p * 2 * 6 + l_t * 6 + l_u * 6.$$

Z uwagi na przyjęty model MES łożysk ślizgowych (2 stopnie swobody w każdym z dwóch węzłów) i model MES konstrukcji podpierającej (2 stopnie swobody w jednym tylko węźle), rzeczywista liczba stopni swobody w układzie globalnym będzie mniejsza.

Ilość odebranych kierunków (stopni swobody) można zatem określić następującą zależnością:

$$l_{oss} = l_p * 4 + l_p * 6 = l_p * 10.$$

Zatem rzeczywisty wymiar macierzy globalnych wynosi:

$$l_{ss1} = l_{ss} - l_{oss},$$

czyli:

$$\mathbf{M}(l_{ss1} \times l_{ss1}), \mathbf{D}(l_{ss1} \times l_{ss1}), \mathbf{K}(l_{ss1} \times l_{ss1}), \mathbf{P}(l_{ss1}); \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}(l_{ss1}).$$

Sposób transformacji dowolnego wektora lub macierzy z układu lokalnego do układu globalnego możemy przedstawić ogólnie:

dla wektora:

$$\mathbf{w}_e = \Theta_e^T \hat{\mathbf{w}}_e,$$

dla macierzy:

$$\mathbf{W}_e = \Theta_e^T \hat{\mathbf{W}}_e \Theta_e,$$

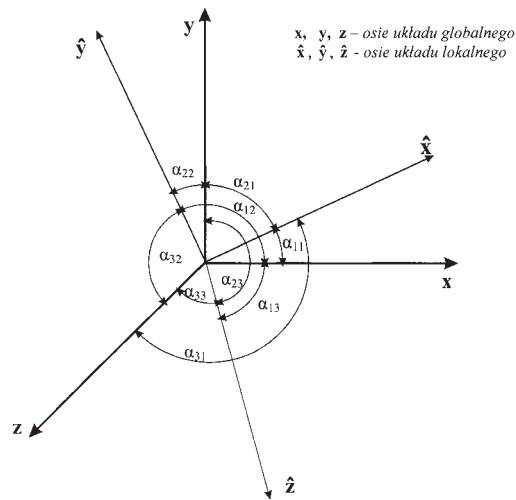
gdzie:

$\hat{\mathbf{w}}_e, \hat{\mathbf{W}}_e$ – oznaczają odpowiednio wektor i macierz w układzie współrzędnych lokalnych;

$\mathbf{w}_e, \mathbf{W}_e$ – wektor i macierz we współrzędnych globalnych, natomiast:

$$\Theta_e = \begin{bmatrix} \Theta & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & \Theta \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Rysunek 2.11 pokazuje znaczenie poszczególnych kątów $\alpha_{11} \div \alpha_{33}$.



Rys. 2.11. Kąty określające kierunki osi układu lokalnego względem układu globalnego

Mając wektory i macierze charakterystyczne elementu opisane w globalnym układzie odniesienia możemy zbudować wektory i macierze globalne ciała dyskretyzowanego elementami skończonymi:

dla wektora:

$$\mathbf{w} = \sum_1^{l_{eb}} w_c,$$

dla macierzy:

$$\mathbf{W} = \sum_1^{l_{eb}} W_c,$$

gdzie:

l_{eb} – oznacza liczbę elementów skończonych modelu dyskretnego;
 \sum – jest sumą wektorów lub macierzy charakterystycznych elementów skończonych **z uwzględnieniem lokalizacji bloków** macierzy lub wektora charakterystycznego w macierzy lub wektorze globalnym dyskretyzowanego obiektu.

2.1.3.1 Sprzężenia pomiędzy podporami

W ogólnym przypadku pomiędzy podporami maszyny wirnikowej zachodzą wzajemne sprzężenia. Ilustrują je macierze \mathbb{C}_{mn} , \mathbb{D}_{mn} , \mathbb{M}_{mn} określające współczynniki dynamiczne sztywności, tłumienia i mas związanych konstrukcji podpierającej w miejscach posadowienia wirnika. Definicję tych sprzężeń w zestawieniu z definicją współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego łożysk ślizgowych przedstawia rys. 2.12 [2.2].

Macierze \mathbb{C}_{mn} , \mathbb{D}_{mn} oraz \mathbb{M}_{mn} opisują zatem własności dynamiczne całej konstrukcji podpierającej a nie tylko poszczególnych podpór. Ich wymiar zależy oczywiście od ilości podpór. Jeśli oznaczymy $l_{pp} = (2p)**2$ gdzie p – oznacza ilość podpór to otrzymamy:

$$\mathbb{C}_{mm}(l_{pp} \times l_{pp}), \quad \mathbb{D}_{mm}(l_{pp} \times l_{pp}), \quad \mathbb{M}_{mm}(l_{pp} \times l_{pp}).$$

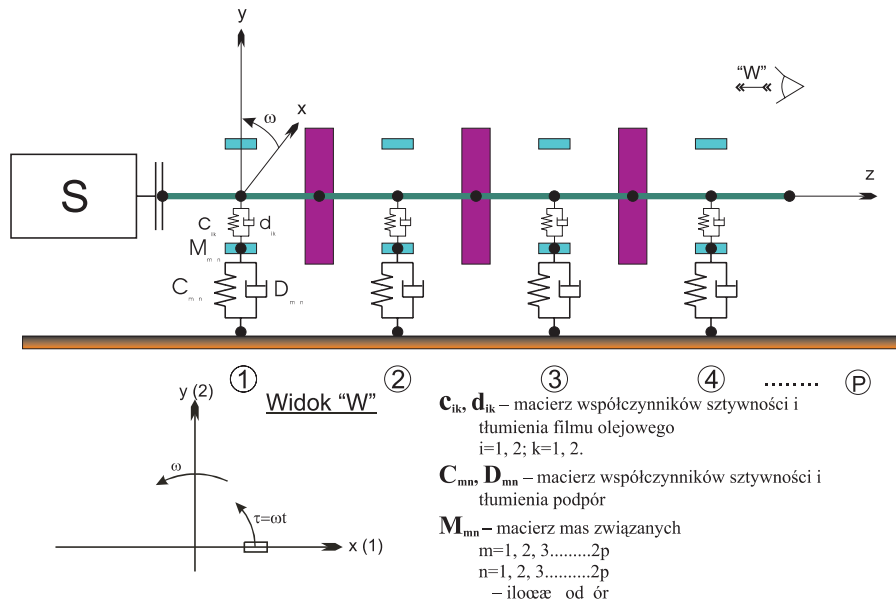
Pełne macierze sprzężeń dla np.: wirnika trójpodporowego będą miały wymiar 36×36 .

Lokalne macierze sztywności i tłumienia konstrukcji podpierającej o wymiarach 12×12 stanowią elementy składowe (podmacierze) macierzy globalnych \mathbb{C}_{mn} , \mathbb{D}_{mn} i \mathbb{M}_{mn} .

2.1.3.2 Struktura macierzy globalnych

Sposób budowy macierzy globalnych z równania ruchu (1.5) – rozdział 1 – przedstawimy na przykładzie wirnika 2 i 3 – podporowego. Przyjmijmy dyskretyzację wirnika 3 – podporowego jak na rys. 2.2.

Wymiary macierzy charakterystycznych poszczególnych elementów składowych modelu dyskretnego są następujące:

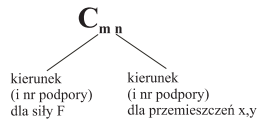
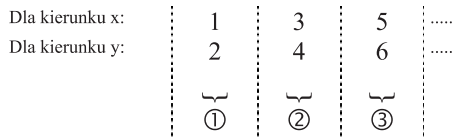


p p p

Definicja współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego

np.: $c_{11} = c_{xx} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ $c_{12} = c_{xy} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ $c_{21} = c_{yx} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ $c_{22} = c_{yy} = \frac{\partial F_y}{\partial y}$

Definicja współczynników sztywności i tłumienia podpór (numeracja więzi)



np.: $C_{52} = \frac{\partial F_5}{\partial x_2}$ oznacza współczynnik sztywności obliczony przy działaniu siły wymuszającej w kierunku poziomym (x) w podporze ③ i przemieszczeń pionowych (y) w podporze ①.

Rys. 2.12. Oznaczenia i konwencja zapisu indeksów współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego i więzi dla podpór [2.2]

Podpory: Macierze \mathbf{C}_{mn} , \mathbf{D}_{mn} , \mathbf{M}_{mn} o wymiarze 36×36 uwzględniają sprzężenia konstrukcji podpierającej. Macierze te uwzględniają kombinacje sprzężeń pomiędzy podporami według następującego schematu:

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}, & \mathbf{P}_{12}, & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{21}, & \mathbf{P}_{22}, & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{31}, & \mathbf{P}_{32}, & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix},$$

gdzie: \mathbf{P}_{IJ} ; $I = 1, 3$, $J = 1, 3$ oznacza podmacierz (12×12) uwzględniającą sprzężenia pomiędzy podporą o numerze I z podporą o numerze J .

Macierze \mathbf{P} budowane są zgodnie z zasadami podanymi wcześniej, z tą różnicą, że kierunki (wskaźniki macierzy) wstawiania odpowiednich współczynników uzależnione są od wartości I i J .

Jeżeli na przykład chcemy zbudować macierz sztywności \mathbf{K}_{fe} dla sprzężenia podpory I z podporą J , to obliczamy nowe wskaźniki $I1$ i $J1$ wg zależności:

$$I1 = 12 * (I - 1),$$

$$J1 = 12 * (J - 1).$$

Wcześniej określiliśmy macierz $\mathbf{K}_{fe}(i, j)$. Obecnie budujemy analogicznie macierz $\mathbf{K}_{fe}(i + I1, j + J1)$, której wymiar jest oczywiście ($12 * lp, 12 * lp$). Następnie, poszczególne bloki tej macierzy, czyli podmacierze \mathbf{P}_{ij} są umieszczane w odpowiednich miejscach macierzy globalnej jak na rys. 2.13. Macierz ta jest macierzą symetryczną, gdyż sprzężenia między podporami \mathbf{P}_{IJ} są takie same jak między \mathbf{P}_{JI} (właściwość układu liniowego).

Pozostałe macierze charakterystyczne, tzn.:

łożyska: trzy macierze o wymiarach (12×12);

dyski sztywne: trzy macierze o wymiarach (6×6);

tłumiki zewnętrzne: dwie macierze o wymiarach (12×12);

elementy belkowe: siedem macierzy o wymiarach (12×12)

budowane są zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 5.3.

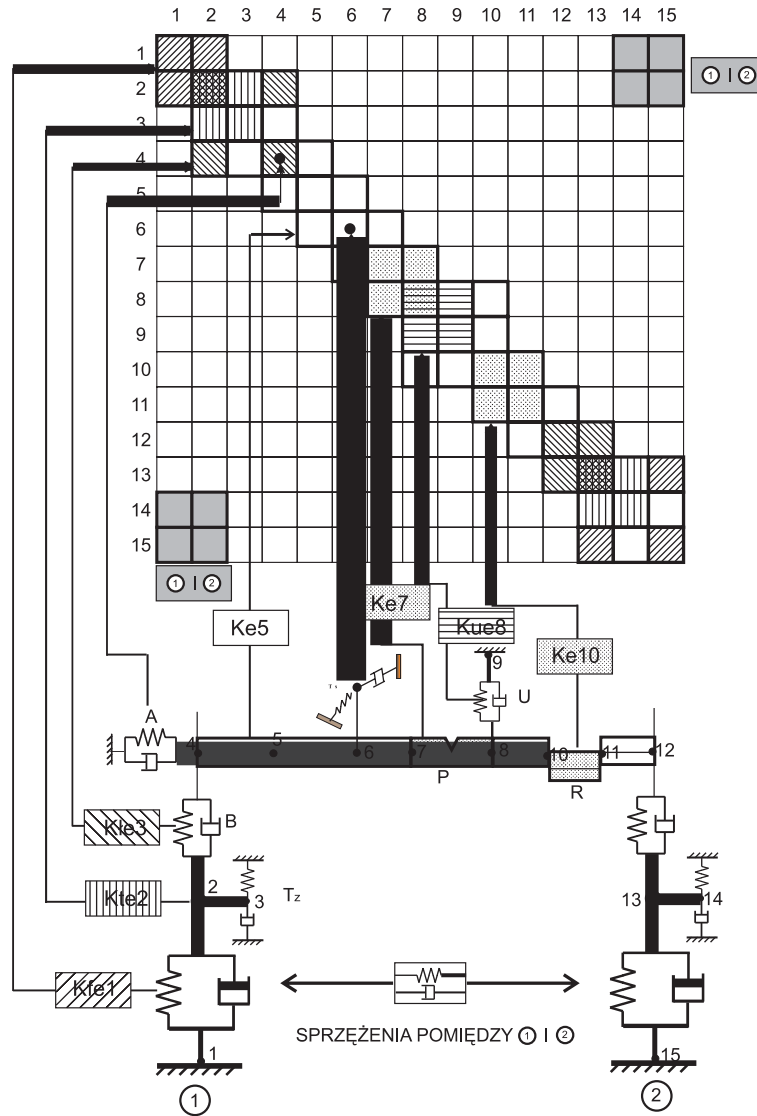
Sposób umieszczania poszczególnych macierzy w strukturze macierzy globalnej przedstawiono schematycznie na rys. 2.13 (dla wirnika trójpodporowego). Struktura globalnej macierzy dla wirnika 2 – podporowego w przypadku istnienia sprzężeń pomiędzy podporami została przedstawiona na rys. 2.14.

Nr węzła	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	P_{11}	P_{11}	T_1						P_{12}	P_{12}					P_{13}	P_{13}
2	P_{11}	$P_{11}+T_1+L_1$	T_1	L_1					P_{12}	P_{12}					P_{13}	P_{13}
3		T_1														
4		L_1		L_1+B_1	B_1											
5				B_1	B_1+B_2	B_2	B_3									
6					B_2	$B_2+D_1+B_3$	B_3+B_4	B_4								
7						B_3	B_4	$B_4+L_2+B_5$	L_2		B_5					
8								L_2	$L_2+P_{22}+T_2$	P_{22}	T_2				P_{23}	P_{23}
9	P_{12}	P_{12}							P_{22}	P_{22}					P_{23}	P_{23}
10	P_{12}	P_{12}							T_2	T_2						
11											$B_5+B_6+D_2$	B_6				
12								B_5			B_6		$B_6+B_7+D_3$	B_7		
13													B_7	B_7+L_3		
14														L_3		
15	P_{13}	P_{13}							P_{23}	P_{23}					L_3+P_{33}	P_{33}
16	P_{13}	P_{13}							P_{23}	P_{23}					P_{33}	P_{33}

Objaśnienia:

- P_{IJ} , $I = 1, 3$, $J = 1, 3$ – macierz charakterystyczna sprężen pomiędzy podporami 1,2,3;
 T_1 , T_2 – macierze charakterystyczne tłumików zewnętrznych 1,2;
 L_1 , L_2 , L_3 – macierze charakterystyczne łożysk 1,2,3;
 $B_1 \div B_7$ – macierze charakterystyczne elementów belkowych 1÷7;
 D_1 , D_2 , D_3 – macierze charakterystyczne sztywnych dysków 1,2,3;

Rys. 2.13. Postać macierzy globalnej modelu dyskretnego wirnika trójpodporowego z rys. 2.2 dla macierzy sztywności, tłumienia i bezwładności w przypadku sprężenia charakterystyk dynamicznych podpór



Rys. 2.14. Sposób tworzenia globalnej macierzy sztywności przy sprzężeniach pomiędzy podporami ① i ② na przykładzie wirnika 2-podporowego

Poszczególne symbole oznaczają tu:

K_{fe1}	– macierz sztywności konstrukcji podpierającej – podpora 1;
K_{te2}	– macierz sztywności tłumika zewnętrznego mocowanego do panwi z podpory 1;
K_{le3}	– macierz sztywności poprzecznego łożyska ślizgowego – podpora 1;
A	– łożysko wzdłużne;
B	– poprzeczne łożysko ślizgowe;
$K_{ei}, i=5 \div 11$	– macierze sztywności dla kolejnych elementów belkowych wirnika;
K_{ue8}	– macierz sztywności dla uszczelnień labiryntowych;
T_s	– tłumik drgań skrętnych;
T_Z	– tłumik zewnętrzny;
P	– element belkowy z pęknięciem;
R	– element belkowy z rozosiowaniem;
U	– uszczelnienie labiryntowe.

Z rys. 2.13 i 2.14 wyraźnie widać, że miejsce wstawiania kolejnych bloków przedstawiających sprzężenia podpór zależy od ich numeracji. Ma to zasadniczy wpływ na szerokość pasma macierzy globalnej. Pożądane jest więc zbudowanie generatora, który by optymalnie przenumerowywał model dyskretny w celu uzyskania najwęższego pasma macierzy globalnej.

Szerokość pasma ma kolosalny wpływ na długość czasu obliczeń zwłaszcza w odniesieniu do zagadnień nieliniowych.

2.1.3.3 Siły wymuszające

Zewnętrzne siły wymuszające działające na układ określa wektor \mathbb{P} z równania (1.5) – rozdział 1. Siły te mogą być przyłożone do dowolnego węzła w układzie globalnym zgodnie z przyjętą konwencją określania kierunków. Mogą to być siły lub momenty sinusoidalnie zmienne synchroniczne lub asynchroniczne lub też dowolnie zmienne w czasie, ale okresowe.

Wektor \mathbb{P} określa zatem:

- niewyważenia (masy wirujące);
- wymuszenia poprzeczne (synchroniczne lub asynchroniczne);
- wymuszenia wzdłużne (synchroniczne lub asynchroniczne);
- wymuszenia skrętne (synchroniczne lub asynchroniczne).

Założenie okresowości działających na układ wymuszeń zewnętrznych związane jest z koniecznością uzyskania zbieżności procedur numerycznych w postępowaniu iteracyjnym.

2.1.3.4 Tłumiki zewnętrzne i łożyska wzdłużne

Na sztywność i tłumienie wału wpływają również tłumiki zewnętrzne (bezstykowe) oraz łożyska wzdłużne, które mogą być usytuowane w dowolnym węźle wału.

Tłumiki drgań skrętnych

Jak już wspominaliśmy w przyjętym modelu istnieje możliwość przyłożenia do układu, zewnętrznych tłumików prętowych. Natomiast do węzłów wału mogą być przykładane wyłącznie tłumiki bezстыkowe, tzw. tłumiki drgań skrętnych. Ich charakterystyki to sztywność c_{z6} i tłumienie d_{z6} . Właśnie tę sztywność i tłumienie musimy umieścić w odpowiednim miejscu macierzy globalnych.

Tym razem nie jest tworzona macierz lokalna (tłumik jest przyporządkowany jednemu węzłowi wału), tylko w zależności od numeru węzła przyłożenia, umieszczamy charakterystyczną sztywność w miejsce szóstego kierunku odpowiadającego temu numerowi (drgania skrętne) bezpośrednio do globalnej macierzy sztywności \mathbf{K} (patrz rys. 2.14) oraz tłumienie w miejsce również szóstego kierunku do globalnej macierzy tłumienia \mathbf{D} .

Przykład:

Załóżmy, że do węzła wału o numerze n przyłożony jest tłumik drgań skrętnych scharakteryzowany przez sztywność c_{z6} i tłumienie d_{z6} . Znalazionym miejscem w globalnej macierzy sztywności \mathbf{K} będzie oczywiście:

$$I = n * 6,$$

$$J = n * 6,$$

$$\mathbf{K}(I, J) = \mathbf{K}(I, J) + c_{z6}.$$

Natomiast dla macierzy globalnej tłumienia \mathbf{D} :

$$I = n * 6,$$

$$J = n * 6,$$

$$\mathbf{D}(I, J) = \mathbf{D}(I, J) + d_{z6}.$$

Łożyska wzdlużne

Łożyska wzdlużne modelowane są poprzez przyjęcie jednego stałego współczynnika sztywności c_{z5} i tłumienia d_{z5} . Podobnie jak przy tłumiku drgań skrętnych, sztywność i tłumienie przyporządkowane są tylko jednemu węzłowi wału. W związku z tym zasada postępowania przy wstawianiu do globalnej macierzy sztywności \mathbf{K} oraz globalnej macierzy tłumienia \mathbf{D} jest analogiczna jak przy tłumikach drgań skrętnych (patrz rys. 2.14). Różnica polega tylko na numerze kierunku na który ta sztywność i tłumienie mają wpływ. Kierunkiem tym jest kierunek „5” – czyli przemieszczenie po osi z .

Wartości: współczynnika sztywności c_{z5} i tłumienia d_{z5} charakteryzujące odpowiednie łożysko wzdlużne umieszczamy bezpośrednio w globalnej macierzy sztywności \mathbf{K} i tłumienia \mathbf{D} na zasadzie identycznej jak umieszczaliśmy odpowiednie współczynniki sztywności i tłumienia w globalnych macierzach, w przypadku tłumika drgań skrętnych (patrz rys. 2.14).

Jeżeli przykładowo mamy łożysko wzdlużne usytuowane w węźle nr m wału wirnika to powinniśmy wykonać następujące operacje:

$$I = m * 5,$$

$$J = m * 5,$$

$$\mathbf{K}(I, J) = \mathbf{K}(I, J) + c_{z5},$$

$$\begin{aligned}
 I &= m * 5, \\
 J &= m * 5, \\
 \mathbf{D}(I, J) &= \mathbf{D}(I, J) + d_{z5}.
 \end{aligned}$$

*

Jak już wspomnieliśmy wcześniej przedstawiony w niniejszym podrozdziale model MES linii wirników zawiera w sobie elementy najtrudniejsze do wyznaczenia a mianowicie współczynniki sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych oraz macierze współczynników sztywności, tłumienia i mas konstrukcji podpierającej. O tym jak złożone jest zagadnienie określenia podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej w przypadku opisu nieliniowego świadczą rozważania przeprowadzone w rozdziale 1. Modelami łożysk ślizgowych i metodami wyznaczania współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego zajmiemy się w następnym podrozdziale.

2.2 Modele poprzecznych łożysk ślizgowych

W poprzednich rozdziałach odnoszących się do modelu MES linii wirników, łożyska ślizgowe wprowadzane były w formie czterech współczynników sztywności i czterech współczynników tłumienia filmu olejowego. Stanowią one ściśle określone i niezmiernie istotne elementy w strukturze macierzy charakterystycznych całego układu zarówno w ujęciu lokalnym jak i globalnym. Pozostaje jednak otwartą kwestią jak te współczynniki wyznaczyć, zwłaszcza w sytuacji, kiedy muszą być one odpowiednio modyfikowane w każdym kroku czasowym postępowania iteracyjnego. Stanowią one bezpośrednią konsekwencję przyjętego modelu cieplnego samego łożyska, przemieszczeń termicznych i eksploatacyjnych podpór oraz warunków pracy wszystkich węzłów łożyskowych. Problem określenia współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego łożysk ślizgowych stanowi istotny element prowadzonych tu rozważań. Zanim jednak przejdziemy do właściwego tematu, warto zacząć od kilku refleksji natury bardziej ogólnej.

Poprzeczne łożysko ślizgowe stanowi system tribologiczny niezwykle trudny do zamodelowania teoretycznego. Zjawiska tu zachodzące opisuje szereg wzajemnie sprzężonych równań, z których każde stanowić może odrębny problem. Również pod względem technologicznym i konstrukcyjnym ciągle otwartą kwestią jest dobór właściwych materiałów stopów łożyskowych bądź też praca węzłów łożyskowych zapewniająca optymalne warunki trwałości i niezawodności. Budową stosownych modeli i programów komputerowych oraz doбором odpowiednich materiałów na warstwy nośne różnego rodzaju łożysk zajmują się liczne ośrodki tribologiczne na całym świecie. Mimo uzyskanych rezultatów wiele zagadnień ciągle jeszcze czeka na swe rozwiązanie.

Obszerne studium teoretyczne tych zagadnień przedstawione zostało w monografii [2.11]. W niniejszym podrozdziale, dla zachowania jego logicznej ciągłości i ułatwienia Czytelnikowi szybkiego dostępu do równań bazowych, przedstawimy jedynie wybrane fragmenty tej książki odpowiednio uwypuklając interpretacje fizyczne zjawisk tu zachodzących. Pominiemy zatem wyprowadzenia wszystkich

równań wraz z założeniami początkowymi ograniczając się ponadto tylko do określonego typu łożysk a mianowicie poprzecznych łożysk ślizgowych.

Zacniemy od wyjaśnienia istoty pracy łożyska i spraw związanych z wymianą ciepła. Szczególną uwagę poświęcimy jednakże wzajemnym **związkom jakie zachodzą pomiędzy maszyną i jej łożyskami**.

Przedstawimy też oczywiście metodę szybkiego i efektywnego wyznaczania współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego. Współczynniki te, jak już zaznaczaliśmy to wielokrotnie wcześniej, stanowią punkt wyjścia do dalszych rozważań.

2.2.1 Zagadnienia wstępne

Załóżmy, że sprężysto-tłumiące własności filmu smarnego dadzą się opisać za pomocą **czterech współczynników sztywności $c_{i,k}$ oraz czterech współczynników tłumienia $d_{i,k}$ stałych w dostatecznie małych przedziałach przemieszczeń czopa i przedziałach czasu**, tak jak to poglądowo ilustruje rys. 2.2.1. Określenie „dostatecznie małe” może niekiedy nastroczać trudności, gdyż przedziały w obrębie których zasadne jest założenie niezmienności charakterystyk filmu olejowego zależne są przecież od aktualnych warunków pracy łożyska. Niemniej jednak założenie to jest powszechnie stosowane i o ile tylko uda nam się dobrać właściwą wielkość tych przedziałów, to całe postępowanie oparte na „**metodzie współczynników**” można uznać za w pełni uzasadnione.

Podstawowe charakterystyki łożyska w **zagadnieniach kinetostatyki** (a więc w zagadnieniach, w których zaniedbujemy zewnętrzne siły wymuszające drgania układu lub też drgania te są bardzo wolno zmienne w czasie) zależą tylko od aktualnego położenia czopa w obrębie luzu łożyskowego, a więc od mimośrodowości względnej ε i kąta położenia linii środków γ . W **zagadnieniach dynamiki** (a więc przy szybkich zmianach przemieszczeń czopa w czasie) dochodzą jeszcze zależności związane z prędkością przemieszczania się czopa czyli $\dot{\varepsilon}$ i $\dot{\gamma}$ (gdzie $\dot{\cdot}$ oznacza pochodną względem czasu). Możemy zatem napisać [2.11], [2.39]÷[2.43]:

- zagadnienia kinetostatyki (małe zmiany ε, γ w czasie)

$$\left. \begin{array}{l} c_{i,k} \\ d_{i,k} \end{array} \right\} = f_k(\varepsilon, \gamma), \quad (2.17)$$

- zagadnienia dynamiki (duże zmiany ε, γ w czasie)

$$\left. \begin{array}{l} c_{i,k} \\ d_{i,k} \end{array} \right\} = f_d(\varepsilon, \gamma, \dot{\varepsilon}, \dot{\gamma}). \quad (2.18)$$

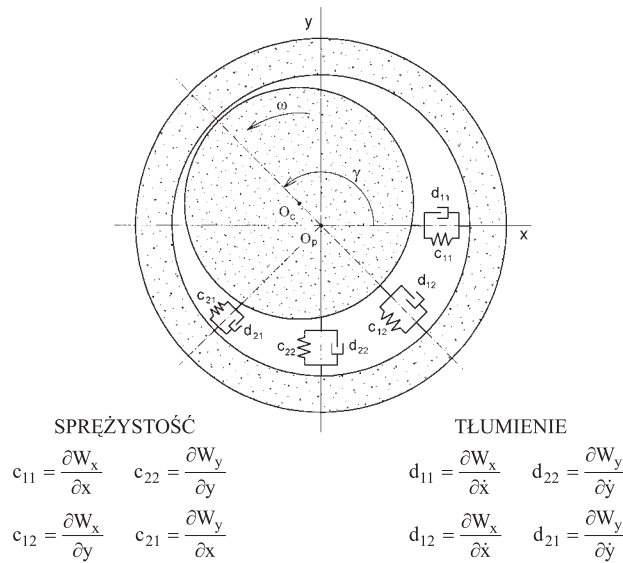
Zależności funkcyjne zarówno f_k jak i f_d w ogólnym przypadku są **nieliniowe** a często **silnie nieliniowe**.

W szczególnym przypadku dynamiki, dla którego możemy przyjąć małe oscylacje środka czopa $\Delta\varepsilon, \Delta\gamma$ wokół punktu równowagi statycznej ε_0, γ_0 , współczynniki $c_{i,k}$ i $d_{i,k}$ w obszarze szczeliny smarnej określonej wartościami maksymalnymi

$\Delta\varepsilon$, $\Delta\gamma$ można uznać za stałe a właściwości łożyska w tym obszarze za liniowe czyli

$$\left. \begin{array}{l} c_{i,k} \\ d_{i,k} \end{array} \right\} = f_0(\varepsilon_0, \gamma_0) = const. \quad (2.19)$$

Warto zwrócić uwagę, iż stała wartość współczynników $c_{i,k}$, $d_{i,k}$ w zw. (2.19) odnosi się jedynie do obszaru $\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, $\gamma_0 + \Delta\gamma$ przy dostatecznie małych $\Delta\varepsilon$, $\Delta\gamma$. Dla innych wartości ε_0 , γ_0 oczywiście współczynniki $c_{i,k}$, $d_{i,k}$ będą inne, ale również stałe (dla dostatecznie małych $\Delta\varepsilon$, $\Delta\gamma$). W tym sensie zależność funkcyjna f_0 jest nieliniowa, co wynika z własności filmu olejowego. Związki (2.17), (2.18) i (2.19) dla łożysk ślizgowych są bardzo znamienne w porównaniu do zwykłych układów mechanicznych o anizotropowych sztywnościach poszczególnych elementów. Zaobserwowanie tej różnicy pozwala na zrozumienie istoty pracy łożyska ślizgowego.

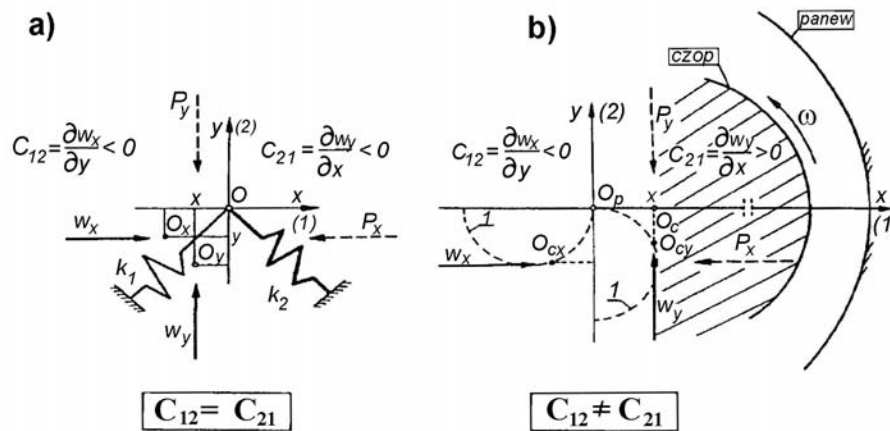


Rys. 2.15. Sprężysto-tłumiące własności filmu olejowego łożysk ślizgowych. Definicja współczynników sztywności $c_{i,k}$ i tłumienia $d_{i,k}$. W_x oraz W_y – składowe reakcji hydrodynamicznej filmu olejowego. Symbol (·) oznacza pochodną względem czasu

2.2.1.1 Czym jest łożysko ślizgowe?

Postawmy teraz pytanie, z czego wynika specyfika łożysk ślizgowych? Rys. 2.16a przedstawia zwykły układ mechaniczny składający się z elementów o różnej sztywności k_1 i k_2 . Wynika stąd anizotropia własności w kierunku poziomym i pionowym

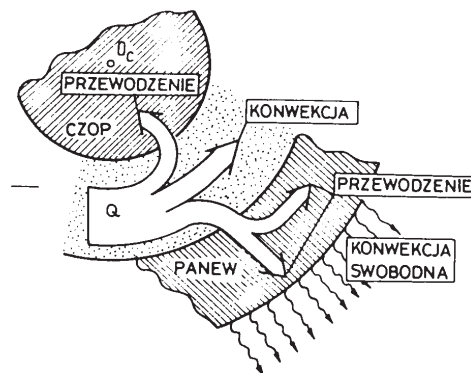
$c_{11} \neq c_{22}$. Rysunek 2.16b przedstawia łożysko ślizgowe posiadające również anizotropię $c_{11} \neq c_{22}$, a mimo to własności łożyska są zupełnie odmienne. Składowe obciążenia zewnętrzne P_x, P_y powodują przemieszczenia środków układów O_c i O_p do miejsc O_x, O_y oraz O_{cx} i O_{cy} . Zauważmy jednak, iż tzw. „skośne” współczynniki sztywności c_{12} oraz c_{21} są w obu przypadkach różne (rys. 2.16). O ile w przypadku zwykłego sprężystego układu mechanicznego współczynniki te są sobie równe czyli $c_{12} = c_{21}$ to w przypadku łożysk ślizgowych prawie zawsze różnią się, czyli $c_{12} \neq c_{21}$. **Doszliśmy w ten sposób do interesującego wniosku, że charakterystyczną cechą łożysk ślizgowych jest nierówność „skośnych” stosunków reakcji i przemieszczeń.** Własności tej nie mają sprężyste anizotropowe układy mechaniczne. Z punktu widzenia mechaniki łożyska ślizgowe zachowują się podobnie jak układy żyroskopowe, a więc układy silnie nieliniowe. Właściwość ta jest przyczyną głównych kłopotów, jakie sprawiają użytkownikom łożyska ślizgowe, a mianowicie jest przyczyną tzw. niestabilności hydrodynamicznej. Układ cechujący się nieliniowymi charakterystykami statycznymi oraz anizotropią skośnych sztywności $c_{12} \neq c_{21}$ może pobierać energię z układu napędowego i przekazywać ją dalej celem pobudzenia, np. drgań własnych. W warunkach słabego tłumienia, co na ogół zachodzi po przekroczeniu granicy stabilności, oznacza to ciągły, niezwykle niebezpieczny wzrost amplitudy drgań. Z powyższego wynika, że łożysko będzie miało tym lepsze własności dynamiczne, im charakterystyki statyczne będą bardziej liniowe i tym samym mniejsza będzie różnica pomiędzy c_{12} i c_{21} . Na podstawie tych zasad konstruowane są wszystkie tzw. łożyska antywibracyjne.



Rys. 2.16. Wyjaśnienie istoty różnic pomiędzy własnościami: a) układu mechanicznego i b) łożyska

2.2.1.2 Łożysko ślizgowe jako generator ciepła

Łożyska ślizgowe, zwłaszcza o dużych średnicach czopa, generują znaczne ilości ciepła. Dla przykładu moc tracona wskutek oporów ścinania w filmie olejowym w łożyskach o średnicy 0,3 m ÷ 0,5 m sięga od kilkudziesięciu do kilkuset kilowatów. Tak znaczne ilości ciepła zmieniają oczywiście własności samego filmu smarnego ale także zmieniają kształt szczeliny smarnej wskutek termicznych deformacji panwi i czopa.



Rys. 2.17. Przepływy wytworzonego w filmie smarnym ciepła Q przez elementy łożyska

Rysunek 2.17 przedstawia możliwe sposoby transportu wytworzonego ciepła Q w poprzecznej szczelinie łożyska ślizgowego. Zjawiska cieplne w łożysku opisuje kilka wzajemnie sprzężonych równań różniczkowych, z których najważniejsze to:

- „trójwymiarowe” równanie Reynoldsa określające rozkład ciśnienia w filmie z uwzględnieniem zmian lepkości w szczelinie smarnej,
- równanie energii określające rozkład temperatury w filmie olejowym,
- równanie przewodnictwa określające rozkład temperatury w panwi i czopie,
- równanie deformacji termosprężystych panwi i czopa,
- równanie zmian lepkości oleju wskutek zmian temperatury $\mu = f(t)$.

Warunki brzegowe dla powyższych równań oraz sposób ich numerycznego rozwiązania stanowią odrębny, bardzo złożony problem. Z oczywistych względów nie będziemy tych zagadnień omawiać w niniejszej monografii. Bliższe informacje na ten temat są dostępne w pracach [2.11, 2.40, 2.42]. Przedstawimy tu jedynie końcową postać równania Reynoldsa w najbardziej ogólnej postaci oraz dyskusję jego prawej strony wskazującą na możliwe źródła nośności hydrodynamicznej.

Wspomniane wyżej równania mogą być w różnym stopniu uproszczone, dając w efekcie różne modele cieplne łożyska i tak:

- **Model izotermiczny.** Przyjmując iż lepkość oleju jest stała w całej szczelinie smarnej, czyli

$$\mu = const, \quad (2.20)$$

pozostaje nam jedynie do rozwiązania zwykle równanie Reynoldsa zapisane w popularnej scałkowanej wzdłuż grubości filmu y formie.

- **Model adiabatyczny.** W modelu tym uwzględniamy zmiany lepkości na powierzchni szczeliny x, z z pominięciem zmian wzdłuż grubości filmu y , czyli:

$$\mu = f(x, z). \quad (2.21)$$

Model adiabatyczny opisuje zatem równanie Reynoldsa, równanie energii i równanie typu $\mu = f(t)$.

- **Model diatermiczny.** Model ten zakłada przestrzenne zmiany lepkości w obrębie szczeliny smarnej, czyli

$$\mu = f(x, z, y). \quad (2.22)$$

Założenie zmian lepkości (i temperatury) wzdłuż grubości filmu olejowego y oznacza przepływ ciepła również przez panew i czop. Model ten obejmuje wszystkie równania wymienione wcześniej (w tym 3D-równanie Reynoldsa) z wyjątkiem równania deformacji termicznych panwi i czopa.

- **Model elastodiatermiczny.** Najbardziej złożony, ale też najbardziej adekwatny do rzeczywistości opis pracy łożyska ślizgowego. Zachodzą tu następujące ogólne zależności:

$$\mu = f(x, z, y)h = h_k + \Delta h, \quad (2.23)$$

gdzie: h_k – oznacza konstrukcyjną geometrię szczeliny smarnej a Δh – deformacje termosprężyste. Model ten opisuje pełny zestaw równań wymienionych wcześniej.

Rozwój sprzętu informatycznego i oprogramowania specjalistycznego powoduje, iż coraz częściej stosowane są w praktycznych obliczeniach modele bardziej złożone takie jak model diatermiczny i elastodiatermiczny. Dają one wyniki najbardziej zbliżone do posiadanych danych eksperymentalnych. Należy jednak zaznaczyć, iż w pewnych sytuacjach, gdzie można założyć „płaską” charakterystykę lepkość-temperatura modele prostsze takie jak model izotermiczny dają dość dobre przybliżenie (np. w obliczeniach łożysk silników spalinowych z wysoką temperaturą oleju dolotowego). Zestawienie modeli cieplnych łożysk ślizgowych przedstawia rys. 2.18.

2.2.1.3 Układ łożyska-maszyna

Na wstępie musimy zdecydowanie zaznaczyć, iż tak często stosowane pojęcie dynamika łożyska w oderwaniu od dynamiki całego układu łożyska-maszyna praktycznie nie ma sensu. Równania ruchu dotyczą zawsze ułożyskowanej maszyny a

1. Model izotermiczny

$$\mu = \text{const}$$

$$h = h_k$$

2. Model adiabatyczny

$$\mu = f(x, z)$$

$$h = h_k$$

3. Model diatermiczny

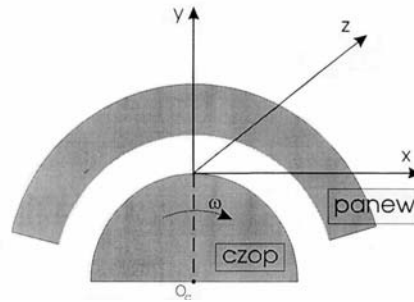
$$\mu = f(x, z, y)$$

$$h = h_k$$

4. Model elastodiatermiczny

$$\mu = f(x, z, y)$$

$$h = h_k + \Delta h(x, y)$$



Rys. 2.18. Modele cieplne łożyska – zestawienie. Oznaczenia: h_k – założony, konstrukcyjny kształt szczeliny smarnej, Δh – odchyłki kształtu spowodowane deformacjami panwi, μ – lepkość dynamiczna oleju, x – współrzędna obwodowa, z – współrzędna wzdłuż szerokości panwi, y – współrzędna wzdłuż grubości filmu olejowego.

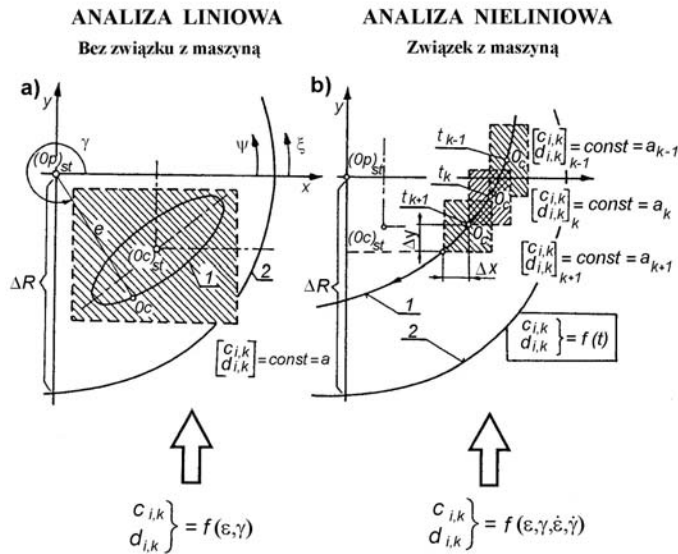
pojęcia takie jak amplituda drgań, częstotści własne, granica stabilności nie dadzą się wyprowadzić bez koniecznych założeń co do współpracującego z łożyskami układu. W dalszym ciągu używając pojęcia „dynamika łożyska” rozumieć będziemy dynamikę układu łożyska-maszyna [2.42].

Zależności typu (2.18) mogą być w zagadnieniach dynamiki budowane w oparciu o jeden z modeli cieplnych zapisanych symbolicznie zależnościami (2.20), (2.21) lub (2.22). Ogólnie jednak przyjęto, że w przypadku kiedy zachodzą zależności typu (2.18), niezależnie od modelu cieplnego łożyska, mamy do czynienia z zagadnieniami **nieliniowymi**, natomiast typu (2.17) i (2.19) z zagadnieniami **liniowymi**. W odniesieniu do układu łożyska-maszyna powyższe definicje mają poważne konsekwencje, ponieważ decydują o tym, czy istniejące w układzie sprzężenia uwzględniamy czy też zaniedbujemy.

W opisie liniowym równania ruchu maszyny dadzą się wyprowadzić przyjmując, w odniesieniu do łożysk, stałe współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego. Upraszcza to znakomicie obliczenia podstawowych parametrów dynamicznych układu. Opis liniowy jest powszechnie stosowany z uwagi na swą prostotę i szybkość w uzyskaniu wyników. Jednakże w wielu przypadkach, z którymi mamy do czynienia w praktyce, przemieszczenia czopa trudno uznać za małe. W takich sytuacjach musimy stosować opis nieliniowy w którym współczynniki sztywności i tłumienia łożyska wyznaczamy w wielu punktach szczeliny smarnej (w odstępie dostatecznie małego przedziału czasu Δt). W podobny sposób musimy rozwiązywać równania ruchu całej maszyny ułożyskowanej ślizgowo. Postępowanie takie powoduje, że charakterystyki wirnika i konstrukcji podpierającej wpływają na aktualne położenie i prędkości przemieszczeń czopa i tym samym na wartości lokalnych, chwilowych współczynników sztywności i tłumienia filmu olejowego. W takim przypadku mamy do czynienia z wzajemnym sprzężeniem łożysk z maszyną. Z matematycznego punktu widzenia sprzężenie to wynika z konieczności określenia pochodnych względem czasu współrzędnych określających aktualne położenie czopa w szczelinie smarnej czyli $\partial\varepsilon/\partial t$ i $\partial\gamma/\partial t$. Aby takie pochodne wyznaczyć musimy znać ich wartości w chwilach poprzedzających rozpatrywany moment czasu, czyli znać dotychczasową trajektorię czopa, a ta z kolei zależy od własności całej maszyny. Postępowanie to jest o tyle proste, że pochodne te są jednocześnie jawnymi parametrami prawej strony równania Reynoldsa. Zauważmy, że w opisie liniowym takie sprzężenie nie zachodzi, ponieważ nie musimy wyznaczać tych pochodnych. Raz określone współczynniki sztywności i tłumienia (np. wokół punktu równowagi statycznej) obowiązują w całym, przyjętym do analizy, fragmencie szczeliny smarnej. Ilustruje to poglądowo rys. 2.19.

Ujawnienie wzajemnych sprzężeń czy też związków z maszyną przy opisie nieliniowym wynikających z konieczności określenia pochodnych $\partial\varepsilon/\partial t$ i $\partial\gamma/\partial t$ nie wyczerpuje wszystkich zjawisk tu zachodzących. Problem jest znacznie bardziej złożony. Zauważmy bowiem, że sprzężenia te mogą wynikać również z innych zjawisk zachodzących przy dużych i szybkich przemieszczeniach czopa, np. kawitacji czynnika smarnego i tym samym kwestii wypełnienia szczeliny smarnej olejem. Jeśli nasze rozważania ograniczymy tylko do pochodnych $\partial\varepsilon/\partial t$ i $\partial\gamma/\partial t$, a równanie Reynoldsa rozwiązujemy zaniedbując procesy kawitacyjne, czyli stosując np. tak popularny warunek brzegowy Swift-Stiebera, to w istocie nasze rozważania prowadzimy w oderwaniu od analizy rzeczywistego stanu łożyska i tym samym całej maszyny. Uzyskujemy wówczas rozwiązania w każdej chwili t_k niezależnie od sytuacji w jakiej znajdował się układ w chwilach poprzedzających rozpatrywany moment czasu, a więc w chwilach t_{k-1} , t_{k-2} ... W takim ujęciu czas t jest traktowany jako parametr, co oznacza, że jeśli tylko określimy interesującą nas chwilę t_k wszystkie równania ruchu opisujące układ łożyska-maszyna dadzą się rozwiązać. Powyższe postępowanie jest na tyle typowe, iż można uznać je jako „klasyczne”. Można też stwierdzić, iż nieliniowa dynamika w ujęciu klasycznym stanowi po prostu sumę stanów „pseudostatycznych”.

Przedstawimy teraz inny możliwy opis zagadnień dynamiki układów łożyska-maszyna, opis w którym interesuje nas stan układu i jego parametry dynamiczne



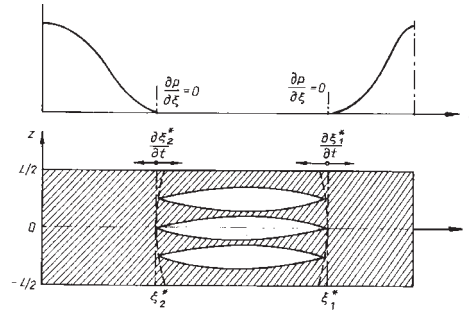
Rys. 2.19. Metody analizy własności łożyska w zagadnieniach dynamiki dla przemieszczeń czopa: a) małych i b) dużych. a) – analiza liniowa, b) – analiza nieliniowa

również w chwilach poprzedzających t_{k-1} , t_{k-2} ... rozpatrywany moment czasu t_k . Oznacza to, że czas t w równaniach ruchu układu nie jest już parametrem, lecz staje się normalną zmienną niezależną. W konsekwencji rozwiązania są zależne od warunków początkowych w jakich znalazł się rozpatrywany układ a nieliniowa dynamika układu jest sumą jego stanów z których każdy jest w pełni „dynamiczny”. Taki opis nosi nazwę opisu z uwzględnieniem „prehistorii” lub też opisu ciągłego [2.41].

Zobaczmy jakie konsekwencje w interpretacji fizycznej (w odniesieniu do łożysk ślizgowych) ma wprowadzona wyżej klasyfikacja. Opis klasyczny, w którym czas jest parametrem, może oznaczać, iż równanie Reynoldsa może być całkowane w granicach, w obrębie których szczelina smarna nie jest wypełniona olejem. Granice te są bowiem określone bez związku z analizą stopnia wypełnienia szczeliny olejem, który zmienia się przecież w czasie.

W przypadku opisu z uwzględnieniem „prehistorii” zastosowane zależności czasowe wymuszają znajomość przebiegu granic obszarów wypełnionych całkowicie olejem i tym samym granic stref skawitowanych w szczelinie smarnej łożyska. Granice te są oczywiście funkcjami czasu tak jak to poglądowo ilustruje rys. 2.20.

Teraz jednak nie zachodzi obawa, iż równanie Reynoldsa będzie całkowane w „pustej” szczelinie ponieważ granice wypełnienia szczeliny olejem są znane i zależne od przepływów oleju od momentu uruchomienia maszyny (warunków po-



Rys. 2.20. Ilustracja zmienności w czasie granic szczeliny smarnej wypełnionej olejem i stref skawitowanych

czątkowych).

Jest sprawą oczywistą, iż opis ciągły z uwzględnieniem „prehistorii” jest opisem bardziej dokładnym chociaż o wiele bardziej czasochłonnym pod względem numerycznym i matematycznym. W niniejszej monografii zaznaczamy jedynie możliwość innego niż klasyczny opisu własności łożysk i związanej z nimi maszyny, ponieważ opis ciągły z uwzględnieniem „prehistorii” nie jest niestety powszechnie stosowany. Podsumowując nasze rozważania dotyczące dynamiki układów łożyska-maszyna warto raz jeszcze podkreślić wprowadzoną klasyfikację, która wprowadza nieco odmienne podejście do analizowanego zagadnienia, a mianowicie:

Zagadnienia nieliniowe

- opis klasyczny, w którym czas t jest parametrem a dynamika jest sumą stanów „pseudostatycznych”,
- opis ciągły z „prehistoria”, w którym czas t jest normalną zmienną niezależną a stany układu w rozpatrywanych chwilach są wzajemnie zależne.

Zagadnienia liniowe

- opis klasyczny, w którym równania ruchu układu wyprowadzone są w oparciu o stałe, niezależne od czasu, współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego (dla danego położenia ε_0 , γ_0 czopa w punkcie równowagi statycznej).

Wróćmy na zakończenie jeszcze raz do związków jakie zachodzą pomiędzy łożyskami i maszyną. Stwierdziliśmy, iż w ogólnym przypadku dynamiki może zachodzić sprzężenie własności łożyska z własnościami całej maszyny. Dotyczy to np. takich układów jak: łożyska – wirnik – fundament w przypadku maszyn wirnikowych lub też łożyska – układ korbowy – korpus w przypadku silników spalinowych.

Warto jednakże zauważyć, iż stopień powyższego „sprężenia” zależy od rodzaju charakterystyk dynamicznych jakie brane są pod uwagę. Jeśli interesują nas takie parametry jak amplitudy drgań, kąty opóźnień fazowych czy granica stabilności to w każdym przypadku (małych czy dużych przemieszczeń) musimy znać, oprócz samego łożyska, podstawowe dane całej maszyny. Jeśli natomiast ograniczymy nasze zainteresowanie do znajomości samych tylko współczynników sztywności i tłumienia filmu smarowego $c_{i,k}$ i $d_{i,k}$, to w przypadku małych przemieszczeń czopa, a więc w przypadku w którym opis liniowy jest uzasadniony, możliwa jest niezależna od reszty maszyny analiza sprężysto-tłumiących własności filmu olejowego. W takim przypadku łożyska mogą być traktowane jako układ odizolowany. Natomiast w przypadku dużych przemieszczeń czopa (analiza nieliniowa) to, jak wykazaliśmy to wcześniej, sprężysto-tłumiące własności filmu olejowego w postaci współczynników $c_{i,k}$, $d_{i,k}$ zależne są od własności związanej z łożyskami maszyny. Wynika to z postaci zw. (2.18), w których współczynniki te zależne są również od prędkości zmian położenia czopa $\dot{\epsilon}$ i $\dot{\gamma}$, a te z kolei zależne są zawsze od rodzaju maszyny i rodzaju wymuszeń. Wynika to także z innych zjawisk takich, jak np. kawitacja i związany z nią opis ciągły czyli prehistoria. Tak więc w przypadku dużych przemieszczeń czopa dla których właściwy jest opis nieliniowy zachodzi pełne sprężenie własności łożyska z własnościami maszyny. Z powyższego sprężenia wynikają istotne konsekwencje nie zawsze dostrzegane przez wielu użytkowników i badaczy.

Poniższa tabelka przedstawia podsumowanie naszych rozważań w zakresie wzajemnych sprężeń w układzie łożysko-maszyna.

Sprężenia łożysk z maszyną		
	Zagadnienia liniowe (małe przemieszczanie czopa wokół punktu równowagi statycznej)	Zagadnienia nieliniowe (duże przemieszczenia czopa)
Współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego	Sprężenie nie zachodzi	Sprężenie zachodzi
Charakterystyki dynamiczne (amplituda drgań, granica stabilności, kąty fazowe)	Sprężenie zachodzi	Sprężenie zachodzi

2.2.2 Podstawowe równania

Przedstawimy teraz zestaw podstawowych równań opisujących diatermiczny model cieplny łożyska. Z modelu tego możemy oczywiście w sposób bardzo łatwy wyprowadzić równania dla modeli prostszych, a mianowicie modelu adiabatycznego i izotermicznego. Pełny zestaw równań, wraz z ich wyprowadzeniami i dyskusją oraz sposobem ich numerycznego rozwiązania znajduje się we wspomnianej już monografii [2.11].

2.2.2.1 Uogólnione równanie Reynoldsa

Równanie Reynoldsa jest najbardziej fundamentalnym równaniem hydrodynamicznej teorii smarowania. Opisuje ono rozkład ciśnienia hydrodynamicznego w szczelinie smarnej, a także wskazuje na możliwe źródła nośności hydrodynamicznej łożyska. Postać tego równania zależy w sposób oczywisty od przyjętego modelu teoretycznego. Niemal każda współczesna publikacja odnosząca się do teorii łożysk ślizgowych podaje, na swój własny użytek, różne wersje uproszczone adekwatne do analizowanego przypadku. Najczęściej są to uproszczenia typowe, opublikowane w literaturze klasycznej [2.44]÷[2.56]. Różnorodność form równania Reynoldsa sprawiać może niekiedy trudności z jego zastosowaniem do przypadków nietypowych lub adaptacją do przyjętego układu współrzędnych.

Przedstawimy zatem równanie w postaci możliwie ogólnej pozwalającej na analizę praktycznie wszystkich ważnych, z technicznego punktu widzenia, przypadków pracy łożyska ślizgowego. Taka postać równania pozwoli nam na szybkie wyprowadzenie formy uproszczonej, opisującej konkretny przypadek, a także na szeroką dyskusję możliwych źródeł dodatkowej nośności hydrodynamicznej łożyska.

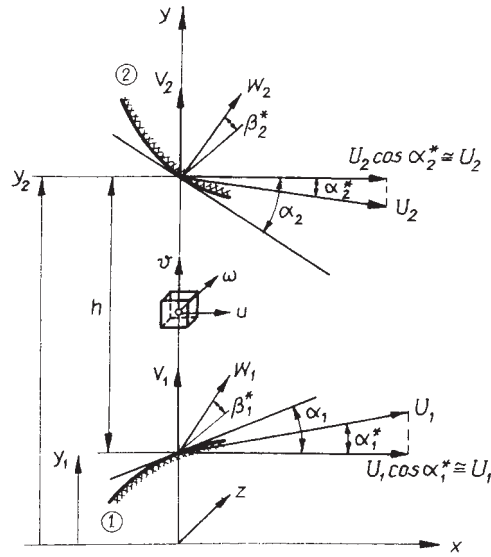
Przyjmijmy prostokątny układ współrzędnych x, y, z w wybranym punkcie szczeliny smarnej. Załóżmy, że szczelina smarna łożyska ograniczona jest powierzchniami ① i ②, a układ współrzędnych usytuowany jest w taki sposób, że oś y oznacza kierunek, wzdłuż którego określana jest grubość szczeliny, natomiast styczne do powierzchni ślizgowych w miejscu przecięcia z dowolną równoległą do osi y tworzą z osią x kąty α_1 i α_2 (rys. 2.21).

Założmy też, że powierzchnie te mogą poruszać się z prędkościami U_1, W_1, V_1 oraz U_2, W_2, V_2 , przy czym wektory prędkości U_1, U_2 oraz W_1, W_2 mogą być nachylone względem osi x pod kątami α_1^*, α_2^* oraz względem osi z pod kątami β_1^*, β_2^* (dla prędkości W_1, W_2).

W przyjętym układzie współrzędnych wartości kątów $\alpha_1^* = 0$ lub $\alpha_2^* = 0$ odpowiadają ruchowi postępowemu powierzchni ślizgowej, natomiast $\alpha_1^* = \alpha_1$ lub $\alpha_2^* = \alpha_2$ ruchowi obwodowemu (w kierunku osi x).

Charakterystyczną cechą łożysk ślizgowych jest mała wartość kąta określającego nachylenie powierzchni tworzących klin smarny. Wykorzystując tę własność do dalszych rozważań, przyjmijmy, że składowe prędkości U_1, U_2 na osi x oraz W_1, W_2 na osi z równe są w przybliżeniu wartości tych prędkości (rys. 2.21).

Przyjmijmy dalej, że prędkości U_1, W_1 oraz U_2, W_2 nie są stałe, lecz są funk-



Rys. 2.21. Układ współrzędnych w wybranym punkcie szczeliny smarnej łożyska

cjami współrzędnych x, z odpowiednio:

$$\left. \begin{array}{l} U_1 \\ U_2 \end{array} \right\} = f(x) \quad \left. \begin{array}{l} W_1 \\ W_2 \end{array} \right\} = f(z).$$

Przestrzeń pomiędzy powierzchniami ① i ② wypełniona jest cieczą smarną, której dowolny element ma składowe prędkości u, w, v w kierunkach x, z, y . Grubość szczeliny smarnej w dowolnie wybranym jej miejscu, będzie wynosiła:

$$h = y_2 - y_1,$$

a tym samym

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial y_2}{\partial z} - \frac{\partial y_1}{\partial z}.$$

Oczywiście zachodzi też związek:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v_2 - v_1.$$

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, lepkość dynamiczna oleju μ będzie funkcją wszystkich współrzędnych geometrycznych:

$$\mu = f(x, y, z),$$

natomiast grubość szczeliny h smarnej będzie funkcją współrzędnych powierzchniowych x, z :

$$h = f(x, z).$$

Przyjmując teraz typowe założenia, właściwe dla hydrodynamicznej teorii smarowania, możemy wyprowadzić najbardziej ogólną postać równania Reynoldsa. Przedstawimy tu jedynie końcową postać równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} A \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} A \right) = & \left[(U_2 - U_1) \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial y_2}{\partial x} \right) + \right. \\ & + (W_2 - W_1) \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial y_2}{\partial z} \right) + B \frac{\partial}{\partial x} (U_2 - U_1) + B \frac{\partial}{\partial z} (W_2 - W_1) + \\ & \left. + h \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial z} \right) + \Delta v^* + \frac{\partial h}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^h \left[\int_0^y \frac{y}{\mu} dy - \frac{\int_0^h \frac{y}{\mu} dy}{\int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \int_0^y \frac{1}{\mu} dy \right] dy, \\ B &= \int_0^h \left[\frac{\int_0^y \frac{1}{\mu} dy}{\int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \right] dy \end{aligned} \right\}, \quad (2.25)$$

$$\Delta v^* = U_2 \alpha_2^* + W_2 \beta_2^* - U_1 \alpha_1^* - W_1 \beta_1^*,$$

natomiast układ współrzędnych i oznaczenia zgodne są z rys. 2.21.

Równanie (2.24) jest, dla przyjętych założeń, najbardziej ogólną postacią równania Reynoldsa obejmującą wszystkie możliwe przypadki ruchu względnego obu powierzchni ślizgowych łożyska.

Prawa strona tego równania kryje w sobie możliwe źródła nośności hydrodynamicznej łożyska. Łatwo możemy zauważyć, że pierwsze dwa człony odpowiadają zasadzie tzw. geometrycznego klina smarnego, a więc zasadzie, według której pracują wszystkie łożyska wzdłużne płaskie. Następne trzy człony wskazują na możliwość powstania dodatniej nośności hydrodynamicznej poprzez odpowiednią zmianę prędkości U i W w poszczególnych punktach szczeliny smarnej. W większości przypadków uzyskanie tą drogą nośności hydrodynamicznej nie jest możliwe, gdyż oznaczałoby to „rozciągliwość” powierzchni ślizgowych. Zauważmy jednak, że w przypadku łożysk wzdłużnych segmentowych, np. typu Michella, prędkości U, W zależne są od współrzędnych x, z nawet dla stałej prędkości kątowej wirowania tarczy ω i założeniu sztywnych „nierozciągliwych” powierzchni ślizgowych. Powyższe człony są więc istotne w analizie pracy tego rodzaju łożysk.

Człony oznaczone symbolem Δv^* po prawej stronie równania (2.24) odpowiadają nośności wynikającej z nachylenia prędkości U, W w stosunku do współrzędnych powierzchniowych x, z . Człony te w głównej mierze opisują pracę wszystkich poprzecznych łożysk ślizgowych (co wykażemy w dalszych rozważaniach). Ostatni człon prawej strony równania Reynoldsa opisuje zmiany grubości szczeliny w

czasie i wskazuje na możliwość uzyskania nośności poprzez tzw. efekt wyciskania. Jest to bardzo istotny człon w analizie zagadnień dynamiki wszystkich rodzajów łożysk.

Prawa strona równania (2.24) wskazuje na jeszcze jedno niekonwencjonalne źródło nośności hydrodynamicznej łożyska. Jeżeli założymy brak wszystkich klasycznych źródeł pozyskiwania nośności (o których była mowa wyżej), tzn. brak „geometrycznego klina” smarnego ($\partial h/\partial x = \partial h/\partial z = \partial y_2/\partial x = \partial y_2/\partial z = 0$), brak rozciągłości powierzchni ($\partial U_1/\partial x = \partial U_2/\partial x = \partial W_1/\partial z = \partial W_2/\partial z = 0$), brak nachylenia wektorów prędkości U i W względem współrzędnych powierzchniowych ($\alpha_1^* = \alpha_2^* = \beta_1^* = \beta_2^* = 0$) oraz brak „wyciskania” filmu ($\partial h/\partial t = 0$) – to i tak możliwa jest dodatnia nośność hydrodynamiczna dzięki członowi $\partial B/\partial x$ i $\partial B/\partial z$. Człony te, jak wynika ze związku (2.25) opisują zmiany lepkości oleju wzdłuż grubości szczeliny. Pochodne tych zmian w kierunku współrzędnych powierzchniowych mogą mieć wartości niezerowe pomimo, iż sama szczelina jest płaska ($\partial h/\partial x = \partial h/\partial z = 0$). Tego rodzaju możliwość uzyskiwania nośności hydrodynamicznej określimy poprzez pewną analogię, jako „klin termiczny”. Jak się okazuje „klin termiczny” również nie wyczerpuje wszystkich możliwości pozyskiwania dodatniej nośności hydrodynamicznej.

Przedstawimy teraz uproszczone postacie równań Reynoldsa wyłącznie dla poprzecznych łożysk ślizgowych.

Założmy, że powierzchnie ślizgowe ograniczające szczelinę smarną są sztywne ($\partial U_1/\partial x = \partial U_2/\partial x = \partial W_1/\partial z = \partial W_2/\partial z = 0$), i że poruszają się w kierunku jednej ze współrzędnych powierzchniowych, np. x ($W_1 = W_2 = 0$, $\beta_1^* = \beta_2^* = 0$). Założmy też, że szczelina jest płaska w kierunku osi z ($\partial y_1/\partial z = \partial y_2/\partial z = \partial h/\partial z = 0$).

Na ogół daje się tak dobrać położenie osi x , aby była ona równoległa do jednej z powierzchni (lub do stycznej do tej powierzchni w rozpatrywanym miejscu). Można wówczas wartości pochodnych $\partial y_1/\partial x$ lub $\partial y_2/\partial x$, wyrazić za pomocą $\partial h/\partial x$:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Powyższy przypadek można uznać za najbardziej typowy.

Cechą charakterystyczną poprzecznych łożysk ślizgowych jest ruch obwodowy powierzchni ślizgowych, co w naszym zapisie oznacza

$$\alpha_1^* = \alpha_1 = \partial y_1/\partial x = -\partial h/\partial x$$

lub

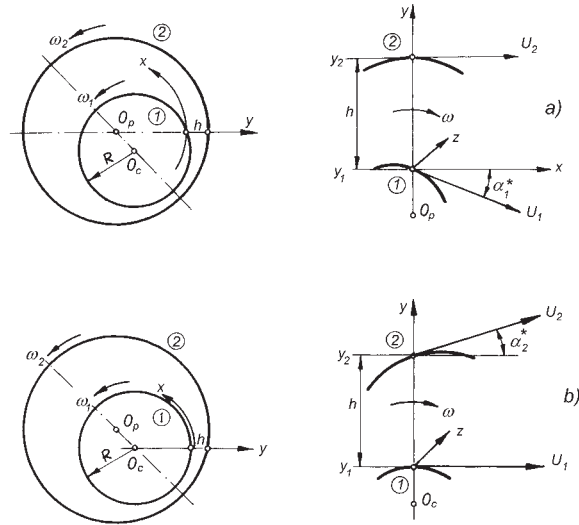
$$\alpha_2^* = \alpha_2 = \partial y_2/\partial x = \partial h/\partial x.$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami, dla układu współrzędnych związanego ze środkiem panwi O_p (rys. 2.22a) będzie:

$$\begin{aligned} U_1 &= \omega_1 R, & U_2 &= \omega_2 R, \\ \alpha_1^* &= -\partial h/\partial x, & \alpha_2^* &= 0, & \partial y_2/\partial x &= 0, \end{aligned}$$

natomiast dla układu związanego ze środkiem czopa O_c (rys. 2.22b):

$$\begin{aligned} U_1 &= \omega_1 R, & U_2 &= \omega_2 R, \\ \alpha_1^* &= 0, & \alpha_2^* &= \partial y_2 / \partial x = \partial h / \partial x. \end{aligned}$$



Rys. 2.22. Układ współrzędnych w punkcie szczeliny związanej ze środkami: a) panwi i b) czopa

Równanie Reynoldsa (2.24) przyjmie postać:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} A \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} A \right) = - \left[(U_2 - U_1) \frac{\partial B}{\partial x} + U_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right]. \quad (2.26)$$

Zauważmy jednak, że jeżeli unieruchomimy jedną z powierzchni (co najczęściej zachodzi w praktyce), postać równania (2.26) zależna będzie od tego, która powierzchnia będzie unieruchomiona w przyjętym układzie współrzędnych. Jeżeli układ współrzędnych zwiążemy z powierzchnią nieruchomą (co jest wygodne) to dla przypadku nieruchomej panwi ($\omega_2 = U_2 = 0$, rys. 2.22a) będzie:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} A \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} A \right) = - \left[U_1 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \right],$$

natomiast dla przypadku nieruchomego czopa ($\omega_1 = U_1 = 0$, rys. 2.22b)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} A \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} A \right) = - \left[U_2 \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right].$$

Wszystkie wyprowadzone równania stanowią uproszczoną postać ogólnego równania Reynoldsa (2.24) i opisują rozkład ciśnienia hydrodynamicznego w szczelinie smarnej w sposób zależny od rodzaju łożyska lub usytuowania powierzchni w układzie współrzędnych. Zauważmy, że pomimo tego „uproszczenia”, każde z tych równań opisuje rozkład ciśnienia z uwzględnieniem trójwymiarowej zmienności lepkości w szczelinie. Odpowiada to przestrzennej analizie wymiany ciepła w filmie olejowym.

Założmy teraz, że lepkość dynamiczna wzdłuż osi y jest stała, a więc

$$\mu = f(x, z).$$

Założenie to odpowiada modelowi adiabatycznemu, w którym ścianki ograniczające szczelinę smarną nie przepuszczają ciepła.

Wartości całek A i B ze zw. (2.25) przyjmą, jak to łatwo wyliczyć, następującą postać:

$$A = -\frac{h^3}{12\mu}, \quad B = \frac{1}{2}h, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Równanie (2.26) dla poprzecznych łożysk ślizgowych przyjmie teraz powszechnie znaną postać:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Zauważamy natychmiast, że w tym przypadku postać równania (2.27) będzie niezależna od tego, którą powierzchnię unieruchomimy i z jaką powierzchnią związany jest układ współrzędnych. Jak pamiętamy, inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku uwzględnienia zmienności lepkości wzdłuż grubości filmu. Fakt ten bywa czasami przyczyną błędów spotykanych w niektórych publikacjach.

Oznaczmy prawą stronę równania (2.27) przez P . Dodatnia nośność hydrodynamiczna (dodatni rozkład ciśnienia $p(x, z)$) wystąpi wówczas, jeśli prawa strona równania będzie ujemna, czyli $P < 0$. Dla $(U_1 + U_2) > 0$ warunek ten może być spełniony tylko dla $\partial h / \partial x < 0$ lub $\partial h / \partial t < 0$, co oznacza zbieżny klin smarny w kierunku ruchu względnego obu powierzchni (osi x) lub zmniejszanie w czasie grubości szczeliny.

Bliższa analiza właściwości poprzecznych łożysk ślizgowych pozwala ujawnić, że istotą ich pracy nie jest „geometryczny klin” smarny, lecz nachylenie prędkości obwodowych U_1, U_2 w stosunku do współrzędnej powierzchniowej x , co związane jest mimośrodowym usytuowaniem czopa względem panwi i prędkościami obwodowymi tych powierzchni.

W naszym zapisie oznacza to, że istnieją kąty $\alpha_1^* = \alpha_1 = -\partial h / \partial x$ lub $\alpha_2^* = \alpha_2 = \partial h / \partial x$.

Rozpisując dokładniej prawą stronę równania (2.26) otrzymamy:

- dla układu współrzędnych związanego ze środkiem panwi

$$P = 6(U_2 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} - 12U_1 \alpha_1^* + 12 \frac{\partial h}{\partial t} =$$

$$\underbrace{6(U_2 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{„1”}} - \underbrace{12U_1 \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{„2”}} + \underbrace{12 \frac{\partial h}{\partial t}}_{\text{„3”}} = 6(U_2 + U_1) \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t},$$

- dla układu współrzędnych związanego ze środkiem czopa

$$P = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12U_2 \alpha_2^* + 12 \frac{\partial h}{\partial t} =$$

$$\underbrace{6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{„1”}} + \underbrace{12U_2 \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{„2”}} + \underbrace{12 \frac{\partial h}{\partial t}}_{\text{„3”}} = 6(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t},$$

a więc w obu przypadkach identyczną postać prawej strony (co potwierdza trafność zapisu równania (2.27)).

Zauważmy, że jeżeli założymy nieruchomą panew w pierwszym przypadku ($U_2 = 0$) oraz nieruchomy czop w drugim przypadku ($U_1 = 0$), to o dodatniej nośności hydrodynamicznej ($P < 0$), decyduje wyłącznie człon „2”, a nie człon „1”, reprezentujący „geometryczny klin” smarny. Jest to interesujące spostrzeżenie pozwalające zrozumieć istotę pracy tych łożysk. Rysunek 2.23 i 2.24 w sposób poglądowy przedstawiają dyskusję prawej strony równania Reynoldsa.

Do dalszych rozważań przyjmiemy postać równania Reynoldsa (2.26) dla modelu diatermicznego oraz (2.27) dla modelu adiabatycznego i izotermicznego.

Rozwiązanie numeryczne – warunki brzegowe

Dla rozwiązania równań (2.26) i (2.27) konieczne jest sformułowanie warunków brzegowych w płaszczyźnie $x - z$ określającej powierzchnię szczeliny smarnej. Naturalnym wydaje się być założenie, że na krawędziach zewnętrznych panwi ($z = \pm L/2$) w kierunku jej szerokości panuje ciśnienie otoczenia czyli $p = 0$ natomiast na krawędzi kieszeni smarnej lub rowków olejowych ($x = x_p$) ciśnienie jest równe ciśnieniu zasilania p_0 . Nieco trudniej przedstawia się sprawa warunku brzegowego dla końca strefy dodatniego ciśnienia hydrodynamicznego ($x = x_k$).

W literaturze znanych jest wiele sposobów określających tego typu warunek brzegowy [2.11]. W naszym modelu zastosujemy najbardziej popularny i jednocześnie potwierdzony eksperymentalnie warunek brzegowy Swift-Stieberta zwany potocznie warunkiem brzegowym Reynoldsa. Mówi on, że ciśnienie hydrodynamiczne kończy się w miejscu, w którym gradient ciśnienia jest równy zeru ($\partial p / \partial x = 0$) a samo ciśnienie jest równe ciśnieniu otoczenia czyli $p = 0$.

Przedstawione wyżej warunki brzegowe możemy więc zapisać następująco:

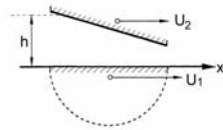
$$\partial p / \partial x(x = x_k, z) = 0,$$

$$p(x = x_k, z) = 0,$$

NOŚNOŚĆ HYDRODYNAMICZNA
DYSKUSJA PRAWEJ STRONY R. R.

① **KLIN SMARNY**

Człony typu: $(U_2 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x}$



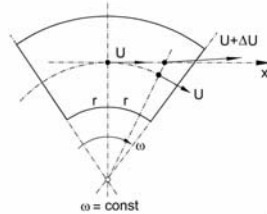
$$U_1 > U_2$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} < 0 \quad P > 0$$

Łożyska wzdłużne płaskie

② **„KURCZENIE” SIĘ POWIERZCHNI**

Człony typu: $h \frac{\partial}{\partial x} (U_2 - U_1)$



$$U_2 - U_1 = U$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$$

$$P > 0$$

Łożyska wzdłużne segmentowe

Rys. 2.23. Dyskusja prawej strony równania Reynoldsa – łożyska wzdłużne

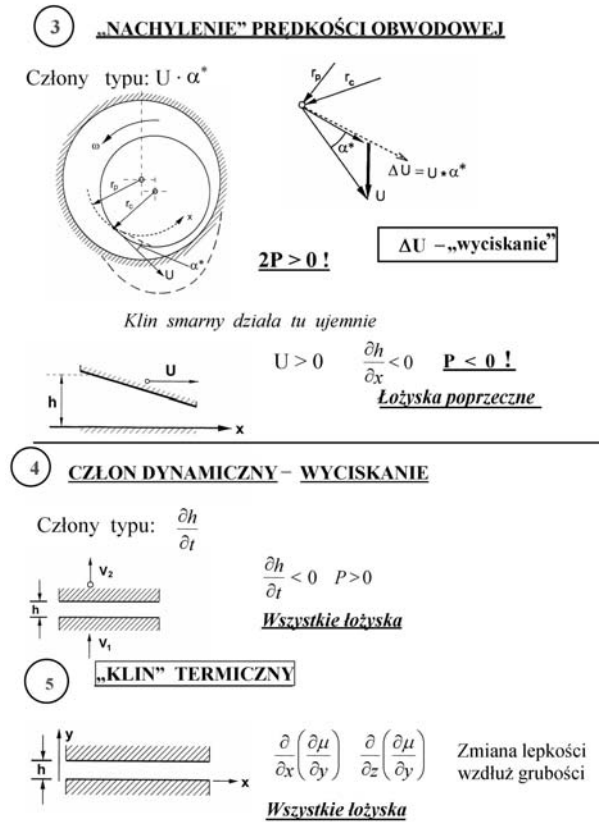
$$p(x, z = \pm L/2) = 0,$$

$$p(x = x_p, z) = p_0.$$

Równania (2.26) i (2.27) z powyższymi warunkami brzegowymi rozwiązane zostały Metodą Różnic Skończonych (MRS) z zastosowaniem typowej pięciopunktowej siatki w płaszczyźnie $x - z$. Otrzymane w ten sposób zestawy równań algebraicznych rozwiązywane zostały w sposób iteracyjny za pomocą znanej metody SOR.

2.2.2.2 Równanie energii

Zachodzący w szczelinie smarnej łożyska proces ścinania cieczy powoduje wzrost temperatury środka smarnego, ponieważ wykonana praca tarcia wewnętrznej zamienia się całkowicie w ciepło. Ilości tak wytworzonej energii cieplnej mogą być bardzo znaczne, dotyczy to zwłaszcza łożysk wielkogabarytowych i szybkoobrotowych. Mierzona w tego rodzaju przypadkach moc tarcia łożyska ślizgowego osiąga wartości rzędu nawet kilku megawatów. Tak olbrzymie ilości ciepła odprowadzane



Rys. 2.24. Dyskusja prawej strony równania Reynoldsa

są na zewnątrz głównie poprzez wyciekający olej, powodując wzrost jego temperatury, oraz przez ścianki łożyska ograniczające szczelinę smarną.

Zjawisko to powoduje zasadniczą zmianę własności środka smarnego (zmianę jego lepkości) oraz termiczne deformacje elementów konstrukcyjnych łożyska i tym samym zmianę energii szczeliny smarnej. Własności statyczne i dynamiczne łożyska ulegają zmianom, czasami wręcz jakościowym.

Proces zmiany pracy mechanicznej (opory ścinania) na energię cieplną zachodzący w szczelinie smarnej opisać można za pomocą równania energii. Jest oczywiste, że dla stanów ustalonych, z zasady zachowania energii musi wynikać równość energii przenoszonej do i z kontrolnej objętości elementu płynu oraz pracy mechanicznej wykonanej przez naprężenia powierzchniowe i siły masowe (w jednostce czasu). Energia przenoszenia składa się z członu uwzględniającego konwekcję (unoszenie) energii wewnętrznej elementu płynu oraz członu uwzględniającego przewodzenie zgodnie z prawem Fouriera. Trzeci możliwy sposób przenoszenia energii –

promieniowanie – pomijamy.

Oznaczając przez q_x, q_y, q_z składowe energii przenoszenia na jednostkę powierzchni w kierunkach x, y, z , możemy napisać (np. dla składowej q_x):

$$q_x = \rho u e - Jk \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (2.28)$$

$$e = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + Jc_v t, \quad (2.29)$$

gdzie:

e – jednostkowa (na jednostkę masy) energia wewnętrzna elementu płynu (strumienia płynu),

J – mechaniczny równoważnik energii cieplnej,

c_v – ciepło właściwe,

k – stała przewodzenia,

t – temperatura.

Pierwszy wyraz w równaniu (2.28) opisuje konwekcję, drugi – przewodzenie, natomiast w równaniu (2.29) pierwszy wyraz odzwierciedla energię kinetyczną, drugi – energię wewnętrzną elementu płynu.

Porównując teraz wyrażenia na energię przenoszenia z wyrami na pracę mechaniczną (iloczyn naprężeń i prędkości) z wykorzystaniem równań Naviera-Stokesa i ciągłości przepływu, otrzymamy (dla stanów ustalonych i z pominięciem sił masowych), najbardziej ogólne równanie energii w postaci:

$$\left. \begin{aligned} & \underbrace{J\rho \left[u \frac{\partial (c_v t)}{\partial x} + v \frac{\partial (c_v t)}{\partial y} + w \frac{\partial (c_v t)}{\partial z} \right]}_{\text{„1”}} + \underbrace{p \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]}_{\text{„2”}} - \\ & - \underbrace{J \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right]}_{\text{„3”}} = \\ & = \underbrace{\mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]}_{\text{„4”}} + \\ & + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}_{\text{„4”}} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (2.30)$$

Człon „1” równania (2.30) opisuje konwekcję energii wewnętrznej cieczy, człon „2” – pracę wykonaną przez element cieczy przy zmianie objętości, człon „3” – przewodzenie energii cieplnej, człon „4” – dyssypację energii kinetycznej cieczy (zmianę na ciepło).

Przyjmując założenie upraszczające charakterystyczne dla hydrodynamicznej teorii smarowania a mianowicie:

- grubość filmu olejowego h jest mała w porównaniu z wymiarami łożyska czyli $v \approx 0$ oraz wszystkie pochodne składowych prędkości z wyjątkiem $\partial u/\partial y$ i $\partial w/\partial y$ są pomijalnie małe,
- człony uwzględniające przewodzenie ciepła w kierunku osi x i z są małe w porównaniu z członami konwekcyjnymi w tych kierunkach,
- ciecz jest nieściśliwa,

a ponadto zakładając stałą wartość ciepła właściwego $c = c_v = c_p = const$ i stałą wartość współczynników przewodzenia k i gęstości cieczy ρ oraz przyjmując jednostki współczynników c i k zgodnie z układem SI (odpada konieczność stosowania mechanicznego równoważnika ciepła J), to równanie (2.30) przyjmie charakterystyczną dla teorii łożysk ślizgowych postać:

$$\rho c u \frac{\partial t}{\partial x} + \rho c w \frac{\partial t}{\partial z} - k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (2.31)$$

gdzie zgodnie z przyjętym układem współrzędnych (rys.2.21) obowiązują:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial p}{\partial x} a + (U_2 - U_1) b + U_1 \\ w &= \frac{\partial p}{\partial z} a + (W_2 - W_1) b + W_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[y - \frac{\int_0^h \frac{y}{\mu} dy}{\int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \right] + (U_2 - U_1) \frac{1}{\mu \int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left[y - \frac{\int_0^h \frac{y}{\mu} dy}{\int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \right] + (W_2 - W_1) \frac{1}{\mu \int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \end{aligned} \right\}, \quad (2.32)$$

natomiast a i b opisują zw. (2.33).

$$\left. \begin{aligned} a &= \int_0^y \frac{y}{\mu} dy - \frac{\int_0^h \frac{y}{\mu} dy}{\int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \int_0^y \frac{1}{\mu} dy \\ b &= \frac{\int_0^y \frac{1}{\mu} dy}{\int_0^h \frac{1}{\mu} dy} \end{aligned} \right\}. \quad (2.33)$$

Łatwo zauważyć, że dwa pierwsze człony lewej strony równania (2.31) reprezentują konwekcję ciepła w kierunkach x i z a człon trzeci – przewodzenie ciepła w kierunku osi y (po grubości filmu olejowego).

Równanie (2.31), dla przyjętych założeń, jest równaniem opisującym pełny model diatermiczny filmu smarnego, a więc model w którym uwzględnia się przestrzenną zmienność temperatury t w szczelinie smarnej

$$t = f(x, y, z).$$

Spotykany jest też często tzw. uproszczony model diatermiczny, w którym pomija się konwekcję ciepła w kierunku jednej osi. W przypadku poprzecznych łożysk ślizgowych, z uwagi na małą zmienność temperatury w kierunku osiowym (w kierunku osi z), pominięcie konwekcji ciepła w tym kierunku jest uzasadnione, czyli

$$t = f(x, y)$$

Istotą modelu diatermicznego, niezależnie od tego w jakich kierunkach uwzględnimy konwekcję ciepła, jest przewodzenie ciepła w kierunku po grubości filmu (osi y), a więc uwzględnienie zmienności temperatury w tym kierunku. Oznacza to konieczność analizy warunków wymiany ciepła nie tylko w filmie smarnym, ale również w elementach konstrukcyjnych łożyska ograniczających szczelinę smarną. Wiele danych, zarówno teoretycznych jak i eksperymentalnych, wskazuje na to, że przewodzenie ciepła wzdłuż grubości filmu olejowego stanowi istotny czynnik w bilansie cieplnym łożyska.

Istnieją jednakże sytuacje, w których przewodzenie ciepła wzdłuż grubości filmu odgrywa mniejszą rolę. Można wówczas założyć, że ścianki ograniczające szczelinę smarną nie przepuszczają ciepła, czyli założyć adiabatyczny model cieplny filmu smarnego. Model ten można opisać za pomocą równania (2.31) odrzucając człon związany z przewodzeniem (ponieważ $\partial t / \partial y = 0$) oraz przyjmując średnie wartości składowych prędkości u , w i ich pochodnych wzdłuż grubości filmu.

Zatem:

$$\rho c u_{sr} \frac{\partial t}{\partial x} + \rho c w_{sr} \frac{\partial t}{\partial z} = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{sr}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{sr}^2 \right], \quad (2.34)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} u_{sr} &= \frac{1}{h} \int_0^h u \, dy & \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{sr}^2 &= \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \, dy \\ w_{sr} &= \frac{1}{h} \int_0^h w \, dy & \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{sr}^2 &= \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \, dy \end{aligned} \right\}, \quad (2.35)$$

natomiast składowe prędkości u i w oraz ich pochodne będą miały teraz, z uwagi na uproszczoną postać wyrażen na a i b dla modelu adiabatycznego:

$$a = \frac{1}{2\mu} (y^2 - yh), \quad b = \frac{y}{h},$$

następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + (U_2 - U_1) \frac{y}{h} + U_1 \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) + (W_2 - W_1) \frac{y}{h} + W_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + (U_2 - U_1) \frac{1}{h} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h) + (W_2 - W_1) \frac{1}{h} \end{aligned} \right\}. \quad (2.36)$$

Warunki brzegowe i początkowe

Celem rozwiązania równania energii (2.31) opisującego pełny model diatermiczny, należy sformułować dwa warunki brzegowe w kierunku grubości filmu smarnego (osi y) oraz dwa warunki początkowe w kierunku obu współrzędnych powierzchniowych (osi x i z).

Warunki brzegowe stanowią na ogół zadane wartości temperatury na powierzchniach ograniczających szczelinę smarną czyli:

$$\left. \begin{aligned} t(x, y, z) |_{y=0} &= t_1(x, z) \\ t(x, y, z) |_{y=h} &= t_2(x, z) \end{aligned} \right\}, \quad (2.37)$$

gdzie: $t_1(x, z)$ i $t_2(x, z)$ – rozkłady temperatury na powierzchniach ① i ② odpowiednio (rys. 2.21).

Rozkłady $t_1(x, z)$ i $t_2(x, z)$ określone mogą być bądź z równania przewodnictwa, bądź z pomiarów eksperymentalnych.

W przypadku poprzecznych łożysk ślizgowych uzasadnione jest przyjęcie stałej temperatury czopa na całej jego powierzchni (z uwagi na łatwą możliwość uśredniania temperatury w przypadku gdy czop się obraca), a więc

$$t_1(x, z) = t_c = const.$$

Temperatura czopa t_c określana jest z eksperymentu lub innego rodzaju szacunków. Bardzo często temperaturę czopa przyjmuje się jako średnią z rozkładu temperatury na powierzchni wewnętrznej panwi, co w naszym zapisie przyjmuje postać ($x = \psi \cdot R$):

$$t_1(\psi, z) = t_c = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} t_2(\psi, z) d\psi. \quad (2.38)$$

Warunek (2.38) jest bardzo dyskusyjny, pomimo to, z uwagi na jego prostotę, jest on powszechnie stosowany.

Znacznie trudniejsze jest określenie warunków początkowych dla równania energii (2.31). Rozważmy przede wszystkim możliwość określenia takiego warunku w kierunku obwodowym (osi x). Warunek ten stanowić może np. zadany rozkład temperatury $t(y)$ wzdłuż grubości filmu (osi y) na krawędzi wlotowej szczeliny smarnej

x_1 . Rozkład $t(y)|_{x=x_1}$ wyznaczony może być w oparciu o analizę wymiany ciepła w kieszeniach smarnych, rowkach zasilających lub przestrzeniach między segmentowych. Załóżmy, że z rozważań tych udało nam się określić strumień ciepły przepływający przez krawędź x_1 w postaci iloczynu przepływu q_1 i średniej (wzdłuż grubości) temperatury t_1 . Wychodząc z postulatu o równości strumieni ciepłych tuż przed krawędzią x_1 (strumień q_1, t_1) i tuż za krawędzią (iloczyn prędkości $u(y)$ i rozkładu temperatury $t(y)|_{x=x_1}$), możemy rozkład $t(y)|_{x=x_1}$ określić, zakładając np.: paraboliczny przebieg zmienności. Powyższy postulat możemy zatem zapisać w następujący sposób:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{h} \int_0^h (ay^2 + by + c) dy \\ t(y)|_{x=x_1} &= ay^2 + by + c \end{aligned} \right\}. \quad (2.39)$$

Współczynniki a, b, c określić można stosunkowo łatwo z dwóch pozostałych warunków a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} t(y) \Big|_{\substack{y=0 \\ x=x_1}} &= t_c|_{x=x_1} \\ t(y) \Big|_{\substack{y=h \\ x=x_1}} &= t_p|_{x=x_1} \end{aligned} \right\}, \quad (2.40)$$

gdzie:

$t_c|_{x=x_1}$ – temperatura dolnej powierzchni ograniczającej (np. czopa) na krawędzi $x = x_1$,

$t_p|_{x=x_1}$ – temperatura górnej powierzchni ograniczającej (np. panwi) na krawędzi $x = x_1$,

natomiast:

$$t_1 = \frac{1}{h} \int_0^h t(y)|_{x=x_1}. \quad (2.41)$$

Jeśli założymy, że krzywa stopnia drugiego z wystarczającą dokładnością opisuje przebieg zmienności temperatury wzdłuż grubości filmu, to problemem pozostaje jednak określenie średniej temperatury t_1 na krawędzi wlotowej do szczeliny. Jak już zaznaczyliśmy, temperatura t_1 wyznaczona może być z ogólnego bilansu przepływów i wymiany ciepła w kieszeniach lub rowkach smarnych. Zagadnienie to stanowi zupełnie odrębny, bardzo złożony problem, który nie będzie jednakże przedmiotem rozważań w niniejszej monografii. Interesujące szczegóły z tego zakresu można znaleźć w książce [2.11].

Równanie energii (2.34) rozwiązane zostało Metodą Różnic Skończonych z zastosowaniem sześciopunktowego jawnego schematu różnicowego Cranka-Nicholsona.

2.2.2.3 Równanie przewodnictwa

Celem określenia rozkładów temperatur $t_1(x, z)$ na powierzchni ① oraz $t_2(x, z)$ na powierzchni ② – (rys. 2.21) – rozwiązać należy dwa równania przewodnictwa, oddzielnie dla każdego z elementów ograniczających szczelinę smarną. Rozkłady

$t_1(x, z)$ oraz $t_2(x, z)$ stanowią jak pamiętamy, warunki brzegowe dla równania energii (2.31).

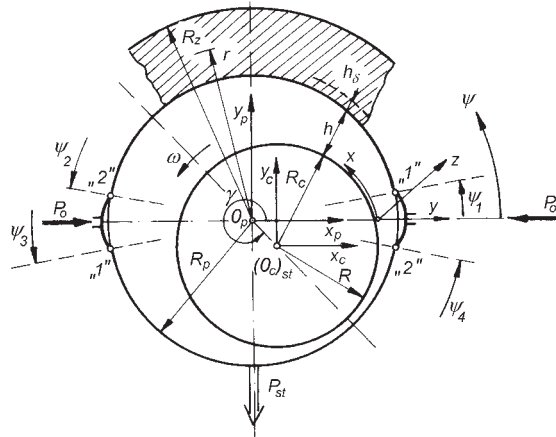
Elementy ograniczające szczelinę smarną są na ogół konstrukcjami bryłowymi przewodzącymi ciepło w kierunku trzech współrzędnych geometrycznych. Określenie rozkładu temperatur w tych elementach jest ściśle uzależnione od warunków pracy łożyska, a więc od warunków wymiany ciepła na powierzchniach wewnętrznych, stykających się bezpośrednio z filmem smarnym i powierzchniach zewnętrznych utwierdzających łożysko. Szczególnie trudne są do określenia warunki wymiany ciepła na powierzchniach zewnętrznych. Ciepło od nagranych elementów ograniczających szczelinę smarną, odprowadzane może być do otoczenia zarówno drogą swobodnej konwekcji, jak i droga przewodzenia przez elementy utwierdzające.

Dla ustalonych warunków pracy, przewodzenie ciepła w dowolnej konstrukcji bryłowej i związany z tym rozkład temperatur określić możemy za pomocą znanego trójwymiarowego równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2.42)$$

Określenie warunków brzegowych dla tego równania wiąże się ściśle z warunkami wymiany ciepła na powierzchniach ograniczających konstrukcję bryłową.

Dalsze rozważania odniesiemy do przypadku poprzecznych łożysk ślizgowych. Przyjmijmy oznaczenia i układy współrzędnych jak na rys. 2.25.



Rys. 2.25. Układy współrzędnych prostokątnych i walcowych

Najbardziej właściwym dla analizowanego przypadku będzie teraz walcowy układ współrzędnych ψ, r, z . Równanie przewodnictwa (2.42) dla panwi przyjmie

postać

$$\frac{\partial^2 t_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_p}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 t_p}{\partial z^2} = 0, \quad (2.43)$$

natomiast dla czopa, zakładając stałą średnia temperaturę w kierunku obwodowym (wskutek wirowania), czyli przyjmując $\partial t_c / \partial \psi = 0$ otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 t_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_c}{\partial r} + \frac{\partial^2 t_c}{\partial z^2} = 0. \quad (2.44)$$

Równanie przewodnictwa dla czopa (2.44) rzadko jest stosowane w praktyce, głównie z powodu trudności z określeniem warunków brzegowych. Najczęściej przyjmowana jest stała wartość temperatury czopa, czyli:

$$t_c(r, z) = t_c = const.$$

Wartość t_c określana jest na podstawie danych eksperymentalnych lub innego rodzaju szacunków.

Warunki brzegowe

Spróbujmy teraz określić warunki brzegowe dla równania (2.43), a więc dla równania opisującego rozkład temperatury w panwi. W kierunku promieniowym r przyjmujemy co następuje:

- na powierzchni wewnętrznej panwi $r = R_p$ spełniony jest warunek równości strumieni ciepłych w filmie olejowym i w materiale panwi, co możemy zapisać:

$$\frac{\partial t_p}{\partial r} \Big|_{r=R_p} = \frac{k_{ol}}{k_p} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=h}, \quad (2.45)$$

- na powierzchni zewnętrznej panwi $r = R_z$ przejmowanie ciepła przez otoczenie odbywa się wyłącznie drogą swobodnej konwekcji

$$\frac{\partial t_p}{\partial r} \Big|_{r=R_z} = \frac{\alpha_{0t}}{k_p} [t_z - t_p(\psi, r, z) \Big|_{r=R_z}], \quad (2.46)$$

gdzie:

- k_{ol} – współczynnik przewodzenia ciepła w oleju;
- k_p – współczynnik przewodzenia ciepła w materiale panwi;
- α_{0t} – współczynnik przejmowania ciepła przy swobodnej konwekcji;
- t_z – temperatura zewnętrzna (otoczenia),
- t – temperatura w filmie smarnym;
- t_p – temperatura w panwi.

W kierunku obwodowym (ψ), w przypadku gdy panew stanowi wycinek pierścienia, oraz w kierunku osiowym (z), na zewnętrznych powierzchniach ograniczających, przyjmowane są najczęściej również warunki (2.46) związane z swobodną konwekcją ciepła do otoczenia.

W przypadku, gdy panew w kierunku obwodowym stanowi pełny, symetryczny pierścień, warunki brzegowe w tym kierunku tworzyć mogą warunki okresowości rozwiązania. Umożliwia to rozwiązanie analityczne równania przewodnictwa w postaci ciągu szeregów trygonometrycznych.

W strefie skawitowanej łożyska strumień cieplny na granicy fazy ciekłej (oleju) i stałej (materiał panwi) ulega zmniejszeniu, ponieważ można założyć, że powietrze zawarte w pęcherzach kawitacyjnych nie uczestniczy w generowaniu ciepła. W takim przypadku wielkość strumienia ciepła możemy odpowiednio skorygować wprowadzając współczynnik korekcyjny w postaci:

$$M_n(\psi) = \frac{q_s(\psi_s)}{q_{cav}(\psi)} \quad \text{dla } \psi > \psi_s, \quad (2.47)$$

gdzie:

$q_s(\psi_s)$ – przepływ oleju na granicy strefy skawitowanej ψ_s ,

$q_{cav}(\psi)$ – przepływ oleju w strefie skawitowanej,

przy czym przepływ q_{cav} korygowany jest według prostej zależności:

$$\frac{h_s}{h} = \frac{1}{L}.$$

Warunek (2.47) dla strefy skawitowanej ($\psi > \psi_s$) możemy więc napisać w postaci:

$$\frac{\partial t_p}{\partial r} \Big|_{r=R_p} = \frac{k_{ol}}{k_p} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=h} M_n(\psi). \quad (2.48)$$

Równanie (2.43) rozwiązane zostało dla przypadku panwi równoległej i symetrycznej za pomocą szeregów trygonometrycznych, a dla przypadku panwi częściowych lub niesymetrycznych za pomocą metody różnic skończonych.

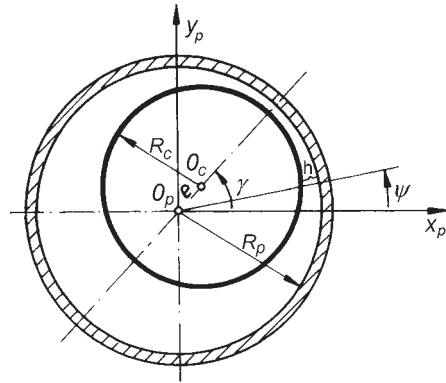
2.2.2.4 Równania kształtu szczeliny smarnej

Podstawą do wyprowadzenia równania kształtu szczeliny smarnej jest oczywiście jej geometria. W przypadku poprzecznych łożysk ślizgowych powszechnie przyjmuje się cylindryczny kształt czopa i panwi. Geometria szczeliny smarnej łożysk z luzem cylindrycznym wraz z układem współrzędnych została przedstawiona na rys. 2.26.

Luz promieniowy bezwzględny definiowany jest jako różnica promieni panwi i czopa (rys. 2.26):

$$\Delta R = R_p - R_c. \quad (2.49)$$

Przy cylindrycznych powierzchniach czopa i panwi kształt szczeliny smarnej można z dobrym przybliżeniem opisać za pomocą funkcji *cosinus*. Założenie to jest



Rys. 2.26. Geometria szczeliny smarnej łożysk z luzem cylindrycznym

powszechnie przyjmowane w literaturze. Definiując kąt ψ jako współrzędną obwodową, kąt γ jako kąt określający położenie linii środków czopa i panwi a e jako mimośrodowość czopa i panwi (rys. 2.26), najbardziej podstawowe równanie kształtu szczeliny smarnej przyjmie postać:

$$h = \Delta R - e \cos(\psi - \gamma). \quad (2.50)$$

Wygodnie jest posługiwać się bezwymiarową formą równania (2.50). Możemy łatwo to uzyskać odnosząc parametry wymiarowe h i e do luzu promieniowego ΔR , czyli wprowadzając $H = h/\Delta R$ oraz $\varepsilon = e/\Delta R$. Równanie (2.50) przyjmie wówczas powszechnie znaną postać bezwymiarową:

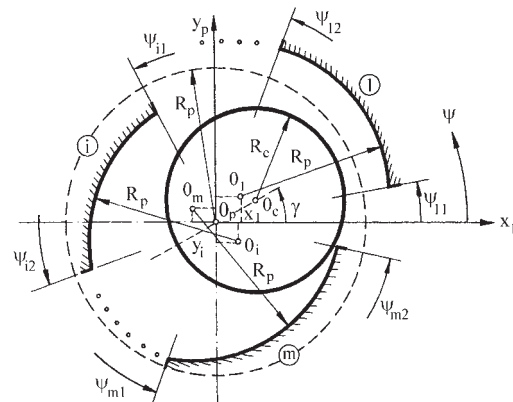
$$H = 1 - \varepsilon \cos(\psi - \gamma). \quad (2.51)$$

Występujące w równaniu (2.51) parametry: $\varepsilon = e/\Delta R$ (mimośrodowość względna) oraz γ (kąt położenia linii środków) są podstawowymi parametrami określającymi kształt cylindrycznej szczeliny smarnej H poprzecznych łożysk ślizgowych. Będą one często używane w dalszych rozważaniach.

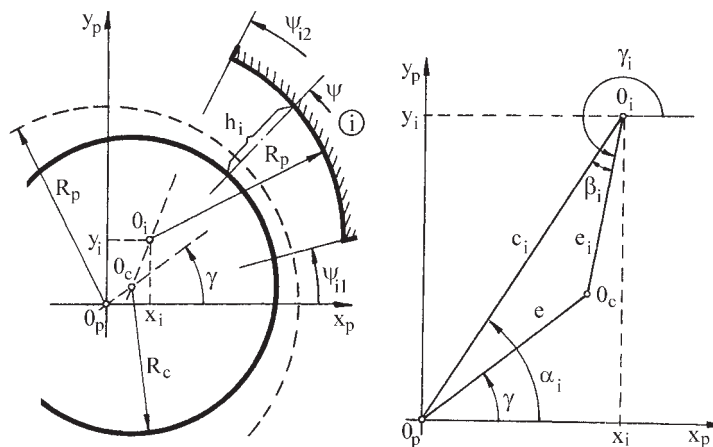
Geometria szczelin wieloklinowych

Zależności (2.50) lub (2.51) opisują całą szczelinę smarną w kierunku obwodowym o pełnym kącie opasania równym 360 stopni (rys. 2.26). Oczywiście zależności te obowiązują również dla fragmentów szczeliny smarnej w kierunku obwodowym czyli dla tzw. łożysk z panwiami częściowymi. Można sobie również wyobrazić, że „rozszczepiamy” środek panwi z rys. 2.26 i poszczególne fragmenty szczeliny smarnej przesuwamy w płaszczyźnie luzów o wielkości x_i, y_i dla i -tego fragmentu. Każdy z tych fragmentów będzie także opisany zależnościami (2.50) lub (2.51) ale

całość odnosić się będzie do łożysk o złożonej już geometrii szczeliny smarnej czyli łożysk wieloklinowych. Sytuację taką pokazują rys. 2.27 i rys. 2.28. Uzyskujemy w ten sposób możliwość praktycznie dowolnego „komponowania” kształtu szczeliny smarnej i tym samym wpływania na własności łożyska. Otrzymujemy całą gamę łożysk z klasy tzw. antywibracyjnych, poczynając od najpopularniejszych z luzem soczewkowym (przesunięcie obu półpanwi w kierunku pionowym y), z luzem offsetowym (przesunięcie obu półpanwi w kierunku poziomym x) czy wreszcie łożysk z luzem wieloklinowym (przesunięcia poszczególnych fragmentów szczeliny zarówno w kierunku pionowym jak i poziomym).



Rys. 2.27. Ogólna geometria szczelin wieloklinowych



Rys. 2.28. Geometria i -tego wycinka panwi

Dla przyjętych oznaczeń i układu współrzędnych z rys. 2.27 i rys. 2.28 otrzymujemy zależność opisującą geometrię szczeliny dla i -tego jej wycinka:

$$H_i(\psi) = 1 - \varepsilon_i \cos(\psi - \gamma_i) \quad \text{w przedziale } \psi_{i1} \leq \psi \leq \psi_{i2}, \quad (2.52)$$

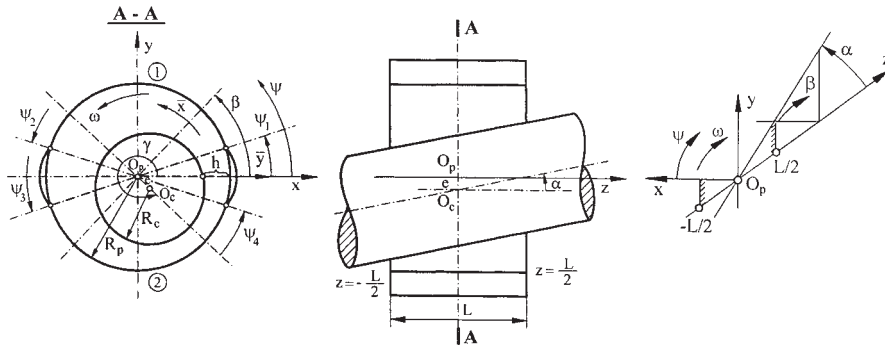
gdzie wartości ε_i oraz γ_i wyznaczamy z prostych przekształceń trygonometrycznych:

$$\varepsilon_i = \sqrt{C_i^2 + \varepsilon^2 - 2C_i\varepsilon \cos(\alpha_i - \gamma)}, \quad C_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \quad \alpha_i = \arctg |Y_i/X_i|,$$

natomiast: $X_i = x_i/\Delta R$, $Y_i = y_i/\Delta R$ określają położenie i -tego fragmentu szczeliny smarnej w płaszczyźnie luzów w stosunku do pierwotnego środka panwi O_p .

Geometria szczelin z „przekoszonymi” czopami

W dotychczasowych rozważaniach dotyczących kształtu szczeliny smarnej zakładaliśmy, że osie czopa i panwi są zawsze równoległe w kierunku osiowym (osi z). W rzeczywistości osie te mogą być nierównoległe, co oznacza przypadek tzw. „zukośowania” lub „przekoszenia” czopa/panwi tak jak to ilustruje rys. 2.29.

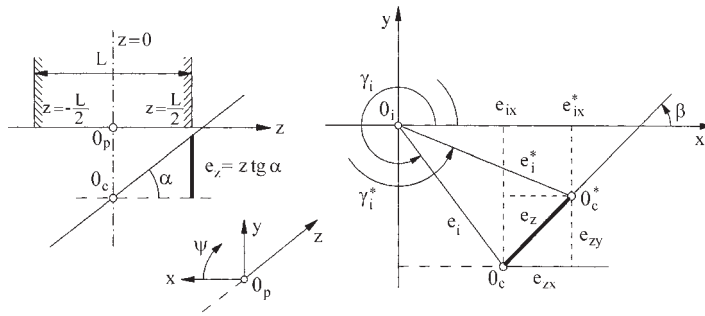


Rys. 2.29. Układ współrzędnych dla przypadku „przekoszonego” czopa

Z powyższego rysunku wynika, że położenie i wielkość zukośowania opisują dwa kąty α i β , które w sposób jednoznaczny determinują kształt szczeliny smarnej. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- x, y – układ prostokątny związany ze środkiem panwi O_p ;
 \bar{x} – współrzędna obwodowa;
 \bar{y} – współrzędna po grubości filmu } lokalny układ współrzędnych;
 z – współrzędna osiowa (po szerokości panwi);
 α – kąt określający przekoszenie czopa w płaszczyźnie wyznaczonej przez kąt β ;
 β – kąt określający położenie płaszczyzny przekoszenia w stosunku do płaszczyzny $x - z$;
 e – mimośrodkowość (w linii środkowej łożyska);
 γ – kat linii środków (w linii środkowej);
 R – promień łożyska ($\approx R_p \approx R_c$).

Rozważmy wycinek i -tej szczeliny smarnej z rys. 2.28, której kształt opisany jest zależnością (2.52). W przypadku panwi przekoszonych zależność ta również będzie obowiązywała jednakże przy odpowiednio zmienionych wartościach ε_i oraz γ_i . Wprowadźmy pojęcie zastępczej mimośrodkowości e_i^* oraz kąta pochylenia linii środków γ_i^* zgodnie z rys. 2.30.



Rys. 2.30. Definicja zastępczych wielkości e_i^* , γ_i^*

Dla danych wartości α , β oraz e , γ , x_i , y_i , ΔR geometria i -tego klina wzdłuż długości łożyska z i w kierunku obwodowym ψ – a więc geometria łożyska przekoszonego wyraża się zależnością:

$$h_i(\psi, z) = \Delta R - e_i^* \cos(\psi - \gamma_i^*), \quad (2.53)$$

gdzie: $\left. \begin{array}{l} e_i^* \\ \gamma_i^* \end{array} \right\} = f(z)$.

Przyjmując oznaczenia jak na rys. 2.30 wyprowadzimy teraz zależności na e_i^* oraz γ_i^* posługując się oznaczeniami pomocniczymi:

$$e_{ix}^* = e_{ix} + e_{zx} = e_i \cos \gamma_i + z \operatorname{tg} \alpha \cos \beta,$$

$$e_{iy}^* = e_{iy} + e_{zy} = e_i \sin \gamma_i + z \operatorname{tg} \alpha \sin \beta,$$

$$e_i = \sqrt{c_i^2 + e^2 - 2c_i e \cos(\alpha_i - \gamma)},$$

$$\gamma_i = \Pi + \alpha_i - \beta_i,$$

gdzie:

$$c_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2},$$

czyli

$$e_i^* = \sqrt{(e_{ix}^*)^2 + (e_{iy}^*)^2}, \quad \gamma_i^* = \arctg \frac{e_{iy}^*}{e_{ix}^*} \text{ (z uwzględnieniem ćwiartki)}.$$

Dla zadanych parametrów przekoszenia α , β mamy:

$$e_i^*(z) = \sqrt{[e_i \cos \gamma_i + z \operatorname{tg} \alpha \cos \beta]^2 + [e_i \sin \gamma_i + z \operatorname{tg} \alpha \sin \beta]^2},$$

$$\gamma_i^*(z) = \arctg \frac{e_i \sin \gamma_i + z \operatorname{tg} \alpha \sin \beta}{e_i \cos \gamma_i + z \operatorname{tg} \alpha \cos \beta} \text{ (z uwzględnieniem ćwiartki)},$$

natomiast wartości e_i , γ_i są określane dla danych e , γ , x_i , y_i według zależności trygonometrycznych dla szczelin wieloklinowych bez przekoszenia czyli związków (2.52).

Rozważmy kilka przypadków szczególnych, które mogą stanowić sprawdzenie wyprowadzonej zależności (2.53).

I tak:

$$\text{dla } \alpha = 0: e_i^* = e_i \quad \gamma_i^* = \gamma_i,$$

$$\text{dla } z = 0: e_i^* = e_i \quad \gamma_i^* = \gamma_i,$$

$$\text{dla } \beta = \gamma: e_i^* = e_i + z \operatorname{tg} \alpha \quad \gamma_i^* = \gamma_i,$$

co jest zgodne z intuicyjnymi przewidywaniami.

Wprowadzając wartości bezwymiarowe dla i -tego klina szczeliny smarnej w sposób analogiczny jak dla całego łożyska oraz ponadto wprowadzając nową wartość ξ

$$H_i = \frac{h_i}{\Delta R}, \quad \varepsilon_i^* = \frac{e_i^*}{\Delta R}, \quad \varepsilon_i = \frac{e_i}{\Delta R}, \quad Z = \frac{2z}{L}, \quad \psi = \frac{\bar{x}}{R},$$

$$\xi = \frac{L}{2\Delta R},$$

wyrażenie (2.53) otrzymamy w następującej postaci:

$$H_i(\psi, Z) = 1 - \varepsilon_i^*(Z) \cos[\psi - \gamma_i^*(Z)], \quad (2.54)$$

gdzie:

$$\varepsilon_i^*(Z) = \sqrt{[\varepsilon_i \cos \gamma_i + Z \xi \operatorname{tg} \alpha \cos \beta]^2 + [\varepsilon_i \sin \gamma_i + Z \xi \operatorname{tg} \alpha \sin \beta]^2},$$

$$\gamma_i^*(Z) = \arctg \frac{\varepsilon_i \sin \gamma_i + Z \xi \operatorname{tg} \alpha \sin \beta}{\varepsilon_i \cos \gamma_i + Z \xi \operatorname{tg} \alpha \cos \beta} \text{ (z uwzględnieniem ćwiartki)}.$$

Współrzędna bezwymiarowa Z przyjmować może wartości z następującego przedziału:

$$-1 \leq Z \leq 1.$$

Związek (2.54) pozwala nam już wyprowadzić zależności na pochodne w kierunku osiowym i obwodowym. O ile pochodna w kierunku obwodowym $\frac{\partial H}{\partial \psi}$ daje się określić stosunkowo łatwo:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi}(Z) = \varepsilon_i^*(Z) \sin[\psi - \gamma_i^*(Z)],$$

to określenie pochodnej w kierunku osiowym $\frac{\partial H}{\partial Z}$ w formie analitycznej jest nieźmiernie trudne. Oczywiście postacię związków (2.54) a także na pochodne $\frac{\partial H}{\partial \psi}$ i $\frac{\partial H}{\partial Z}$ nie przedstawiają żadnych trudności przy obliczeniach numerycznych.

Wartości kątów α dla typowej geometrii szczeliny smarnej są bardzo małe. Możemy się o tym przekonać przyjmując następujące parametry łożyska:

$$D = 0,1 \text{ m}, \quad L = 0,05 \text{ m}, \quad \Delta R = 80 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Jak łatwo wyliczyć, dla $\varepsilon = 0$ i $\beta = 90^\circ$ $\alpha_{\max} = 0.183^\circ$, natomiast dla $\varepsilon = 0.3$ i $\beta = 90^\circ$ $\alpha_{\max} = 0.128^\circ$. Kąty α są więc w skali bezwzględnej małe.

Geometria szczelin z odchyłkami eksploatacyjnymi

Kształt szczeliny smarnej określonej związkami (2.51, 2.52, 2.54) jest idealnym kształtem geometrycznym zakładanym w procesie konstrukcji łożyska. W większości przypadków związek ten jest wystarczająco dokładny. Może się jednak zdarzyć, że wskutek niedokładności technologicznych lub deformacji termosprężystych panwi występujących w procesie eksploatacji łożyska przy dużych obciążeniach, rzeczywisty kształt szczeliny smarnej odbiega już od kształtu konstrukcyjnego. Jeśli jednak założymy, że odchyłki eksploatacyjne lub technologiczne które określimy jako $H_\delta(\psi, Z)$ nie są zbyt duże w stosunku do wielkości luzu łożyskowego ΔR (co najczęściej zachodzi w praktyce), to główny zarys szczeliny smarnej możemy nadal określić zależnością funkcyjną typu kosinus, tylko odpowiednio zmodyfikowaną:

$$H_i(\psi, Z) = 1 - \varepsilon_i^*(Z) \cos[\psi - \gamma_i^*(Z)] + H_\delta(\psi, Z), \quad (2.55)$$

gdzie wartości ε_i^* oraz γ_i^* przyjmują oczywiście wartości stosowne dla łożysk z luzem cylindrycznym (2.51), wieloklinowym (2.52) lub z przekoszonymi czopami (2.54).

2.2.2.5 Współczynniki sztywności i tłumienia filmu smarnego

Przejdźmy teraz do zagadnień związanych z określeniem współczynników sztywności i tłumienia filmu smarnego. Procedura ich wyznaczania jest niestety dość złożona.

Rozpatrzmy przypadek poprzecznego łożyska ślizgowego z nieruchomą panwią. Równanie Reynoldsa (2.26) dla takiego przypadku przyjmie następującą postać:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} A \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} A \right) = - \left[\omega R \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \right], \quad (2.56)$$

gdzie A i B opisują związki (2.25). Do dalszych rozważań wygodnie jest przyjąć bezwymiarową formę równania poprzez wprowadzenie następujących, typowych dla poprzecznych łożysk ślizgowych, związków:

$$\psi = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad H = \frac{h}{\Delta R}, \quad Z = \frac{2z}{L}, \quad M = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \tau = \omega t,$$

gdzie ΔR – luz promieniowy łożyska, L – szerokość panwi, D – średnica czopa, R – promień czopa, h – wysokość szczeliny smarnej, μ_0 – lepkość dynamiczna oleju w temperaturze zasilania t_0 , ω – prędkość kątowna czopa, t – czas.

Wartość ciśnienia hydrodynamicznego p można wówczas wyrazić w formie bezwymiarowej jako:

$$\Pi = \frac{p(\Delta R/R)^2}{LD\mu_0\omega},$$

natomiast wyrażenia na A i B (związki (2.25)) można zapisać w postaci bezwymiarowej w następujący sposób:

$$\bar{A} = A \frac{\mu_0}{h^3} \quad \text{oraz} \quad \bar{B} = B \frac{1}{h}.$$

Równanie (2.56) możemy teraz przekształcić do postaci bezwymiarowej:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(H^3 \bar{A} \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(H^3 \bar{A} \frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right) = \left[\frac{\partial H}{\partial \psi} (\bar{B} - 1) + H \frac{\partial \bar{B}}{\partial \psi} - \frac{\partial H}{\partial \tau} \right], \quad (2.57)$$

Opiszemy teraz sposób postępowania dla przypadku małych przemieszczeń czopa wokół punktu równowagi statycznej, a więc dla przypadku, dla którego właściwy jest **opis liniowy** i adekwatny jest związek (2.19) i sytuacja przedstawiona na rys. 2.19a z podrozdziału 2.2.1.

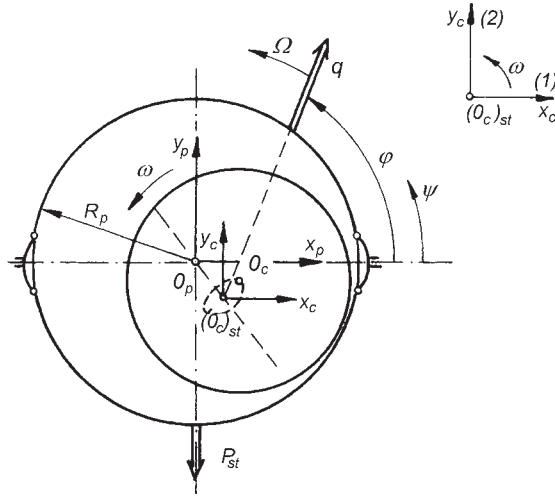
Opis liniowy

Rozwiązanie równania (2.57), dla danej chwili τ , stanowi rozkład ciśnienia hydrodynamicznego $\Pi(\psi, Z)$ i tym samym składowe reakcje $\bar{\Pi}_x, \bar{\Pi}_y$ można zapisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Pi}_x &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \Pi \cos \psi \, dZ d\psi \\ \bar{\Pi}_y &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \Pi \sin \psi \, dZ d\psi \end{aligned} \right\}. \quad (2.58)$$

Przyjmijmy układ współrzędnych jak na (rys. 2.31). Załóżmy, że znamy składowe reakcje hydrodynamiczne $\bar{\Pi}_{x0}, \bar{\Pi}_{y0}$ w punkcie równowagi statycznej odpowiadającym położeniu czopa $(O_c)_{st}$. Załóżmy też, że środek czopa O_c wykonuje, wskutek różnego rodzaju zaburzeń ruchu, małe oscylacje wokół punktu równowagi statycznej $(O_c)_{st}$.

Założenie małych ruchów względnych czopa i panwi pozwala na linearyzowanie związków pomiędzy składowymi reakcjami a przemieszczeniami.



Rys. 2.31. Układ współrzędnych

Przyjmijmy w układzie współrzędnych x_c, y_c związanym ze środkiem czopa w położeniu równowagi statycznej $(O_c)_{st}$ bezwymiarowe składowe przemieszczeń

$$X_c = \frac{x_c}{\Delta R} \quad \text{oraz} \quad Y_c = \frac{y_c}{\Delta R},$$

a także znak różniczkowania względem bezwymiarowego czasu $\tau = \omega t$:

$$(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Możemy teraz napisać:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Pi}_x &= \bar{\Pi}_{x0} + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial X_c} \right)_{st} \overset{\perp}{X}_c + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial Y_c} \right)_{st} \overset{\perp}{Y}_c \\ \bar{\Pi}_y &= \bar{\Pi}_{y0} + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial X_c} \right)_{st} \overset{\perp}{X}_c + \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial Y_c} \right)_{st} \overset{\perp}{Y}_c \end{aligned} \right\}. \quad (2.59)$$

Indeks st oznacza, że pochodne $\partial \bar{\Pi}_x / \partial X_c$, $\partial \bar{\Pi}_x / \partial Y_c$ itd. obliczane są w punkcie równowagi statycznej czopa $(O_c)_{st}$.

Przyjmując następujące oznaczenia w zapisie tensorowym (rys. 2.31)

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial X_c} \right)_{st} & \gamma_{12} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial Y_c} \right)_{st} \\ \gamma_{21} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial X_c} \right)_{st} & \gamma_{22} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial Y_c} \right)_{st} \end{aligned} \right\}, \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial X_c} \right)_{st} & \beta_{12} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_x}{\partial Y_c} \right)_{st} \\ \beta_{21} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial X_c} \right)_{st} & \beta_{22} &= \left(\frac{\partial \bar{\Pi}_y}{\partial Y_c} \right)_{st} \end{aligned} \right\}, \quad (2.61)$$

równanie (2.59) można też przedstawić w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Pi}_x - \bar{\Pi}_{x0} &= \gamma_{11} X_c + \gamma_{12} Y_c + \beta_{11} X_c + \beta_{12} Y_c \\ \bar{\Pi}_y - \bar{\Pi}_{y0} &= \gamma_{21} X_c + \gamma_{22} Y_c + \beta_{21} X_c + \beta_{22} Y_c \end{aligned} \right\}.$$

Współczynniki γ_{11} , γ_{12} , γ_{21} , γ_{22} – ogólnie $\gamma_{i,k}$ – są to bezwymiarowe współczynniki sztywności, natomiast β_{11} , β_{12} , β_{21} , β_{22} – ogólnie $\beta_{i,k}$ – bezwymiarowe współczynniki tłumienia.

W zw. (2.60) i (2.61) współczynniki sztywności $\gamma_{i,k}$ i tłumienia $\beta_{i,k}$ mają postać bezwymiarową, stosowną do sposobu ubezwymiarowania składowych reakcji $\bar{\Pi}_x$, $\bar{\Pi}_y$ oraz przemieszczeń X_c , Y_c .

Ponieważ:

$$\bar{\Pi}_x = \frac{W_x (\Delta R/R)^2}{LD \mu_0 \omega}, \quad \bar{\Pi}_y = \frac{W_y (\Delta R/R)^2}{LD \mu_0 \omega},$$

natomiast:

$$X_c = \frac{x_c}{\Delta R}, \quad Y_c = \frac{y_c}{\Delta R},$$

łatwo wyprowadzić, że

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{i,k} &= c_{i,k} \frac{(\Delta R/R)^2 \Delta R}{DL \mu_0 \omega} = c_{i,k} S_0 \frac{\Delta R}{P_{st}} \\ \beta_{i,k} &= d_{i,k} \frac{(\Delta R/R)^2 \Delta R}{DL \mu_0} = d_{i,k} \omega S_0 \frac{\Delta R}{P_{st}} \end{aligned} \right\}, \quad (2.62)$$

gdzie:

$c_{i,k}$ – współczynniki sztywności wymiarowe w [N/m],

$d_{i,k}$ – współczynniki tłumienia wymiarowe w [Ns/m],

natomiast:

$$S_0 = \frac{P_{st} (\Delta R/R)^2}{LD \mu_0 \omega} \quad \text{oraz} \quad P_{st} = \sqrt{W_{x0}^2 + W_{y0}^2}.$$

Symbol S_0 oznacza tu oczywiście liczbę Sommerfelda, natomiast W_{x0} , W_{y0} składowe reakcji filmu w punkcie równowagi statycznej $(O_c)_{st}$.

Tradycyjne podejście do zagadnienia wyznaczenia tych współczynników polega na przyjęciu małych przyrostów ΔX_c , ΔY_c , ΔX_c , ΔY_c i obliczaniu reakcji $\bar{\Pi}_x$, $\bar{\Pi}_y$ dla kolejnych ich wartości (co oznacza czterokrotne rozwiązanie równania Reynoldsa) a następnie obliczaniu pochodnych według najprostszej przybliżonej zależności, np. $\gamma_{11} = (\bar{\Pi}_x - \bar{\Pi}_{x0}) / \Delta X_c$. Metoda ta jest mało dokładna (wynik zależy bowiem od wielkości przyjętych przyrostów ΔX_c , $\Delta Y_c \dots$). Ponadto istnieje

niebezpieczeństwo, że dla zbyt małych przyrostów $\Delta X_c, \Delta Y_c \dots$ wejdziemy już w zakres znacznych błędów numerycznych (dokładność obliczeń maszyny cyfrowej).

Przedstawimy teraz nowoczesną, bardzo dokładną i szybką metodę obliczania współczynników sztywności i tłumienia opartą na rachunku perturbacji.

Punktem wyjścia do naszych rozważań jest postać równania Reynoldsa (2.57) właściwa dla złożonego diatermicznego modelu cieplnego, w którym odniesiona lepkość środka smarnej M jest funkcją trzech współrzędnych geometrycznych

$$M = f(\psi, Y, Z),$$

a kształt szczeliny smarnej H jest funkcją obu współrzędnych powierzchniowych

$$H = f(\psi, Z).$$

Metoda perturbacji polega na rozwinięciu w szereg Taylora w punkcie równowagi statycznej $(O_c)_{st}$ wszystkich członów wchodzących w skład równania (2.57) i odzwierciedlających wzajemne zależności pomiędzy siłami i przemieszczeniami (w naszym przypadku pomiędzy ciśnieniem Π i kształtem szczeliny H) według parametrów zakłócających $X_c, Y_c, \overset{\perp}{X}_c, \overset{\perp}{Y}_c$.

Nie ma więc potrzeby rozwijania w szereg Taylora całek \bar{A} i \bar{B} , gdyż są one funkcjami lepkości M , a ta z kolei nie zależy, w przyjętym modelu, bezpośrednio od ciśnienia Π (lepkość M zależy pośrednio od ciśnienia Π ; zależność ta jest jednak minimalna przy małych przemieszczeniach względnych czopa i panwi – stąd możemy ją zaniedbać).

Rozwinięcie w szereg Taylora wyrażeń na ciśnienie Π i kształt szczeliny H przyjmie postać:

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \Pi_{st} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \overset{\perp}{X}_c} \right)_{st} \overset{\perp}{X}_c + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \overset{\perp}{Y}_c} \right)_{st} \overset{\perp}{Y}_c \\ H &= H_{st} + \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c \end{aligned} \right\} \cdot \quad (2.63)$$

Można wykazać, że poszukiwane współczynniki sztywności $\gamma_{i,k}$ i tłumienia $\beta_{i,k}$ dadzą się przedstawić w postaci:

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_{11} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} \cos \psi \, d\psi dZ \\
 \gamma_{21} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} \sin \psi \, d\psi dZ \\
 \gamma_{12} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} \cos \psi \, d\psi dZ \\
 \gamma_{22} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} \sin \psi \, d\psi dZ \\
 \beta_{11} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} \cos \psi \, d\psi dZ \\
 \beta_{21} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} \sin \psi \, d\psi dZ \\
 \beta_{12} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} \cos \psi \, d\psi dZ \\
 \beta_{22} &= -\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} \sin \psi \, d\psi dZ
 \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Aby wyznaczyć rozkłady $(\partial \Pi / \partial X_c)_{st} \dots \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st}$ musimy rozwinąć w szeregu Taylora również pochodne ciśnienia Π i kształtu szczeliny H wchodzące w skład równania (2.57):

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} &= \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \right)_{st} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c \\
 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi^2} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi^2} \right)_{st} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c + \\
 &\quad + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} X_c + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} Y_c \\
 \frac{\partial H}{\partial \psi} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial X_c} \right)_{st} X_c + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial Y_c} \right)_{st} Y_c
 \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

W analogiczny sposób rozwijamy pochodne $(\partial \Pi / \partial Z)$, $\partial^2 \Pi / \partial Z^2$ oraz $\partial H / \partial Z$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} \overset{\perp}{X}_c + \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} \overset{\perp}{Y}_c \\ H^2 &= H_{st}^2 + 2H_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} \overset{\perp}{X}_c + 2H_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} \overset{\perp}{Y}_c \\ H^3 &= H_{st}^3 + 3H_{st}^2 \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} \overset{\perp}{X}_c + 3H_{st}^2 \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} \overset{\perp}{Y}_c \end{aligned} \right\}. \quad (2.66)$$

Powyższe wyrażenie wstawiamy teraz do równania Reynoldsa (2.50), wykonujemy odpowiednie mnożenie, opuszczamy wszystkie człony zawierające iloczyny $X_c \overset{\perp}{X}_c$, $X_c \overset{\perp}{Y}_c$, $X_c \overset{\perp}{Y}_c \dots$, a następnie przyporządkowujemy wyrażenia względem X_c , $\overset{\perp}{X}_c$, Y_c , $\overset{\perp}{Y}_c$. Porównując wyrażenia lewej i prawej strony równania Reynoldsa według X_c , $\overset{\perp}{X}_c$, Y_c , $\overset{\perp}{Y}_c$, pozostawiając poszukiwane rozkłady $(\partial \Pi / \partial X_c)_{st} \dots$ $(\partial \Pi / \partial Y_c)_{st}$ po lewej stronie, a wszystkie inne wyrażenia po prawej, po odpowiednim uporządkowaniu dochodzimy ostatecznie do czterech równań różniczkowych zakłócających i jednego równania „niezaburzonego”:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial X_c} \right)_{st} \right] &= R_x \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \overset{\perp}{X}_c} \right)_{st} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \overset{\perp}{X}_c} \right)_{st} \right] &= R_{\overset{\perp}{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Y_c} \right)_{st} \right] &= R_y \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \overset{\perp}{Y}_c} \right)_{st} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[H_{st}^3 \bar{A} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \overset{\perp}{Y}_c} \right)_{st} \right] &= R_{\overset{\perp}{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left[H_{st}^3 \bar{A} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \right)_{st} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[H_{st}^3 \bar{A} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{st} \right] &= R_{st} \end{aligned} \right\}, \quad (2.67)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \frac{\partial R_{st}}{\partial X_c} + R_{xA} \\ R_{\overset{\perp}{x}} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} \\ R_y &= \frac{\partial R_{st}}{\partial Y_c} + R_{yA} \\ R_{\overset{\perp}{y}} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} \end{aligned} \right\}, \quad (2.68)$$

natomiast:

$$\left. \begin{aligned}
R_{st} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} (\bar{B} - 1) + H_{st} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} \\
\frac{\partial R_{st}}{\partial X_c} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial X_c} \right)_{st} (\bar{B} - 1) + \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} \\
\frac{\partial R_{st}}{\partial Y_c} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial Y_c} \right)_{st} (\bar{B} - 1) + \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} \\
R_{xA} &= -3 \left\{ \frac{R_{st}}{H_{st}} \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} + H_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} \left[H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial X_c} \right)_{st} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{A} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 H_{st} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{st} \left[H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Z \partial X_c} \right)_{st} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{A} \left(\frac{\partial H}{\partial Z} \right)_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} \right] \right\} \\
R_{yA} &= -3 \left\{ \frac{R_{st}}{H_{st}} \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} + H_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} \left[H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial Y_c} \right)_{st} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{A} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} \right] + \left(\frac{D}{L} \right)^2 H_{st} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{st} \left[H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Z \partial Y_c} \right)_{st} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{A} \left(\frac{\partial H}{\partial Z} \right)_{st} \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} \right] \right\}
\end{aligned} \right\} \cdot \quad (2.69)$$

Zauważamy, że równanie piąte „niezaburzone” z układu równań (2.67) jest po prostu równaniem Reynoldsa (2.57) w punkcie równowagi statycznej, a więc dla $\partial H / \partial \tau = 0$. Również lewa strona równań różniczkowych zakłócających jest podobna do równania Reynoldsa o czym się przekonamy, jeśli zamiast rozkładów $\partial \Pi / \partial X_c \dots$ itd., położymy ciśnienie Π . Powyższe oznacza, że **wszystkie równania z układu (2.67), a więc łącznie z równaniem Reynoldsa (2.57) mogą być rozwiązywane według identycznego schematu numerycznego. Fakt ten jest ważny zarówno z uwagi na wygodę zapisu jak i szybkość obliczeń numerycznych.** Rozwiązaniem układu (2.67) są rozkłady $\partial \Pi / \partial X_c \dots \partial \Pi / \partial Y_c$, które scałkowane według zależności (2.64) dają w efekcie poszukiwane współczynniki sztywności i tłumienia.

Odrębny problem stanowi określenie zależności $(\partial H / \partial X_c)_{st}$ oraz $(\partial H / \partial Y_c)_{st}$. Kształt szczeliny smarnej dla poprzecznych łożysk ślizgowych (dla dowolnego jej wycinka) można opisać za pomocą powszechnie przyjmowanego wyrażenia z wykorzystaniem funkcji *cosinus*:

$$H(\psi, Z_p, \varepsilon_i, \gamma_i) = 1 - \varepsilon_i \cos(\psi - \gamma_i) + H_\delta(\psi, Z_p),$$

gdzie:

ε_i, γ_i – parametry związane z położeniem środka czopa ε, γ oraz rodzajem luzu,

$H_\delta(\psi, Z_p)$ – odchyłki od założonego kształtu konstrukcyjnego.

Interesują nas niewielkie oscylacje środka czopa wokół punktu równowagi statycznej, a więc niewielkie przyrosty $\Delta \varepsilon_i$, i $\Delta \gamma_i$. Oznacza to, że przyrosty te nie powodują zmian członu $H_\delta(\psi, Z_p)$, zależnego przede wszystkim od położenia czopa w punkcie równowagi statycznej i zewnętrznych warunków pracy łożyska.

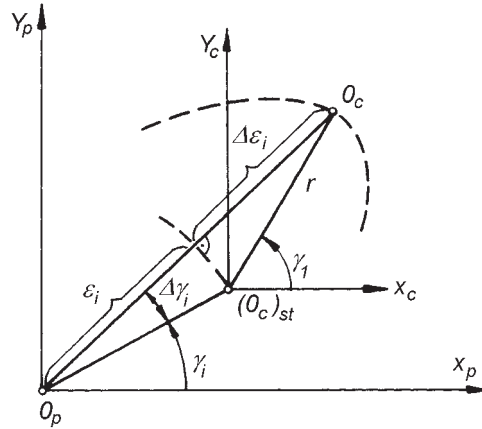
Możemy więc napisać:

$$H = H_{st} + \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_i} \right)_{st} \Delta \varepsilon_i + \left(\frac{\partial H}{\partial \gamma_i} \right)_{st} \Delta \gamma_i,$$

przy czym:

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_i} = -\cos(\psi - \gamma_i),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_i} = -\varepsilon_i \sin(\psi - \gamma_i).$$



Rys. 2.32. Zależności geometryczne przy ruchu czopa względem punktu równowagi statycznej

Wykorzystując zależności geometryczne jak na rys. 2.32 mamy:

$$\Delta \varepsilon_i = r \cos(\gamma_1 - \gamma_i),$$

$$\Delta \gamma_i = \frac{r \sin(\gamma_1 - \gamma_i)}{\varepsilon_i},$$

oraz

$$X_c = r \cos \gamma_1, \quad Y_c = r \sin \gamma_1.$$

Uwzględniając zależności geometryczne typu:

$$\cos(\gamma_1 - \gamma_i) = \cos \gamma_1 \cos \gamma_i + \sin \gamma_1 \sin \gamma_i$$

i podobnie dla $\sin(\gamma_1 - \gamma_i)$, $\cos(\psi - \gamma_i)$, $\sin(\psi - \gamma_i)$, po uporządkowaniu otrzymamy ostatecznie:

$$H = H_{st} - X_c \cos \psi - Y_c \sin \psi,$$

co oznacza:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial X_c} \right)_{st} &= -\cos \psi & \left(\frac{\partial H}{\partial Y_c} \right)_{st} &= -\sin \psi \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial X_c} \right)_{st} &= \sin \psi & \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial Y_c} \right)_{st} &= -\cos \psi \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Z \partial X_c} \right)_{st} &= 0 & \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Z \partial Y_c} \right)_{st} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.70)$$

Jest interesujące, że zw. (2.70) nie zależą od ε_i , γ_i oraz Z_p a także członu H_δ . Mają więc charakter ogólny odnoszący się do wszystkich łożysk poprzecznych, dla których konstrukcyjny kształt szczeliny daje się opisać funkcją typu cosinus.

Uwzględniając zależności (2.70) prawe strony układu równań (2.67), a więc związki (2.68) i zw. (2.69) możemy napisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \frac{\partial R_{st}}{\partial X_c} + R_{xA} & R_y &= \frac{\partial R_{st}}{\partial Y_c} + R_{yA} \\ R_x &= \cos \psi & R_y &= \sin \psi \\ R_{st} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} (\bar{B} - 1) + H_{st} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial R_{st}}{\partial X_c} &= (\bar{B} - 1) \sin \psi - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \psi} \cos \psi \\ \frac{\partial R_{st}}{\partial Y_c} &= (1 - \bar{B}) \cos \psi - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \psi} \sin \psi \\ R_{xA} &= 3 \left\{ \frac{R_{st}}{H_{st}} \cos \psi - H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \right)_{st} \left[H_{st} \sin \psi + \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} \cos \psi \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{D}{L} \right)^2 H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{st} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{st} \cos \psi \right\} \\ R_{yA} &= 3 \left\{ \frac{R_{st}}{H_{st}} \sin \psi - H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \right)_{st} \left[-H_{st} \cos \psi + \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)_{st} \sin \psi \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{D}{L} \right)^2 H_{st} \bar{A} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{st} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial Z} \right)_{st} \sin \psi \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (2.71)$$

Zatem bezwymiarowe współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego określone związkami (64) wyznaczamy rozwiązując równania różniczkowe zakłócające (67) z uwzględnieniem ich prawych stron w postaci (71). Wykorzystując natomiast związki (62) łatwo możemy uzyskać wartości tych współczynników w formie **wymiarowej**.

Opis nieliniowy

W sytuacji, kiedy mamy do czynienia z dużymi przemieszczeniami czopa w obrębie szczeliny smarnej, a więc w sytuacji przedstawionej na rys. 2.19b kiedy obowiązują zależności (2.18), przedstawiona wyżej procedura wyznaczania współczynników sztywności i tłumienia musi być odpowiednio zmodyfikowana. Jak się okazuje, metoda perturbacji może być z powodzeniem zastosowana również i w tym przypadku.

Założmy, że to, co do tej pory oznaczaliśmy jako punkt równowagi statycznej czopa $(O_c)_{st}$, oznacza teraz położenie czopa O_c dla wybranej chwili t_k przy jego dużych przemieszczeniach, tak jak to pokazuje rys. 2.19b. Dla tak określonej chwili t_k rozwiązujemy równanie Reynoldsa (2.57) wraz z jego członem dynamicznym $\partial H/\partial \tau$ czyli pochodnymi $\partial \varepsilon/\partial t$ i $\partial \gamma/\partial t$.

Jeżeli przyjmiemy, że dla dostatecznie małych przedziałów czasu $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ znajdziemy dostatecznie małe przedziały przemieszczeń Δx oraz Δy w których możemy założyć, że własności filmu olejowego są stałe i opisane chwilowymi i stałymi w tych przedziałach „dynamicznymi” współczynnikami sztywności i tłumienia (rys. 2.19b), to cała procedura wyznaczania tych współczynników metodą perturbacyjną może być zastosowana również w przypadku opisu nieliniowego. Wystarczy bowiem w wyrażeniach określających prawe strony równań zakłócających (2.71) podstawić nową wartość na R_{st} którą będzie teraz prawa strona równania Reynoldsa (2.57) z członem dynamicznym czyli:

$$R_{st} = R_{st}^* = \frac{\partial H}{\partial \psi} (\bar{B} - 1) + H \frac{\partial \bar{B}}{\partial \psi} - \frac{\partial H}{\partial \tau}, \quad (2.72)$$

natomiast w równaniach zakłócających (2.67) zamiast ciśnienia Π obliczonego w punkcie równowagi statycznej podstawiamy teraz Π^* stanowiącego wynik rozwiązania „dynamicznego” równania Reynoldsa (2.57) dla określonej chwili t_k czyli:

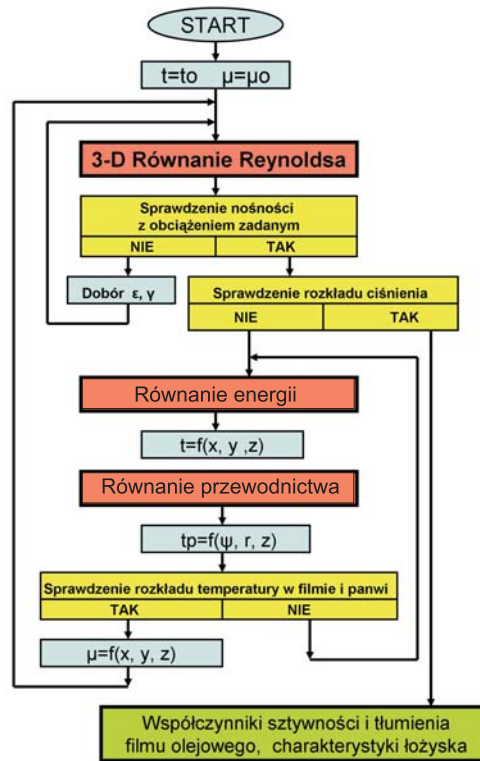
$$\Pi = \Pi^*. \quad (2.73)$$

Uwzględniając związki (2.72) i (2.73) możemy teraz całą perturbacyjną procedurę wyznaczania współczynników sztywności i tłumienia filmu smarnego powtórzyć tak jak dla przypadku opisu liniowego, czyli rozwiązać równania zakłócające (2.67) z uwzględnieniem związków (2.71) i ostatecznie związków (2.64).

2.2.3 Algorytm obliczeń

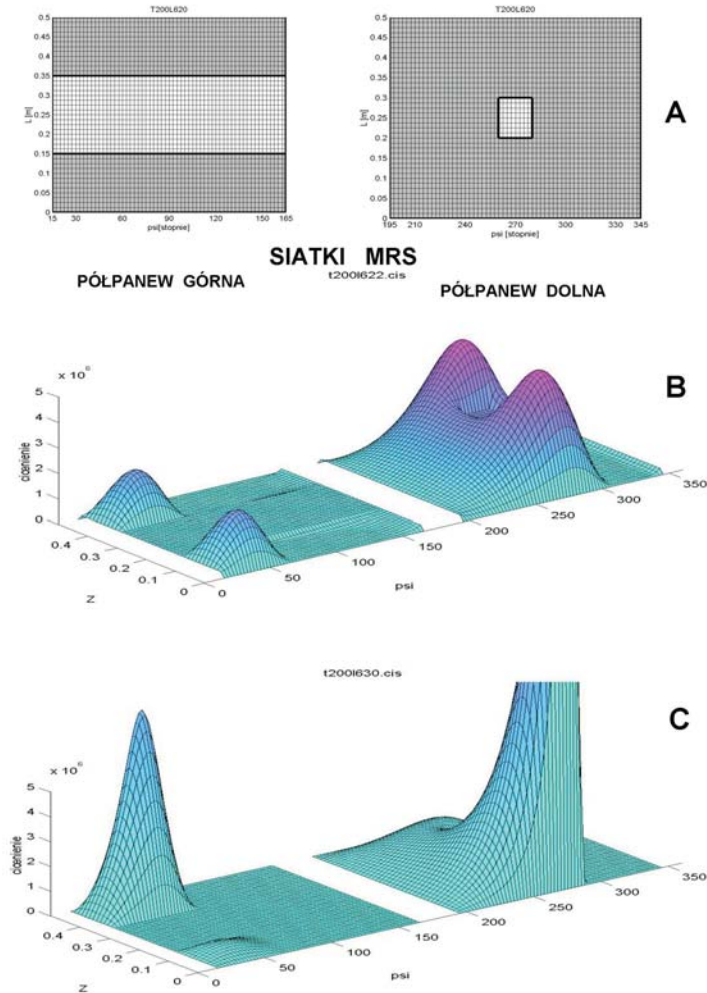
Przedstawione w podrozdziale 2.2.2 równania odnoszące się do łożysk ślizgowych, a więc równanie Reynoldsa (2.26), równanie energii (2.31), równanie przewodnictwa (2.43), równania kształtu szczeliny smarnej (2.51)-(2.55), równania zakłócające (2.67) i (2.71) czy wreszcie równania definiujące współczynniki sztywności i tłumienia filmu smarnego (2.64), tworzą spójną i logiczną całość, są one więc wzajemnie sprzężone. Fakt ten rodzi określone trudności w ich numerycznym rozwiązaniu. Dobór właściwego algorytmu obliczeń i właściwych metod numerycznych to kwestia wielu lat doświadczeń i prób zespołów badawczych zajmujących się tym problemem. Przedstawimy teraz algorytm obliczeń przyjęty w IMP PAN w Gdańsku, który sprawdził się w wielu praktycznych aplikacjach. Algorytm ten przedstawia rys. 2.33. Warto tu zauważyć, że równanie energii i przewodnictwa spięte zostały oddzielną pętlą iteracyjną. Wynika to z faktu, iż określone z równania energii warunki brzegowe dla równania przewodnictwa (gradienty temperatury w filmie) bardzo silnie wpływają na stabilność rozwiązania numerycznego. Zastosowanie wydzielonej pętli iteracyjnej oraz zastosowanie dodatkowo metod

relaksacyjnych z współczynnikiem relaksacji znacznie mniejszym od 1 umożliwia uzyskanie stabilnych rozwiązań.

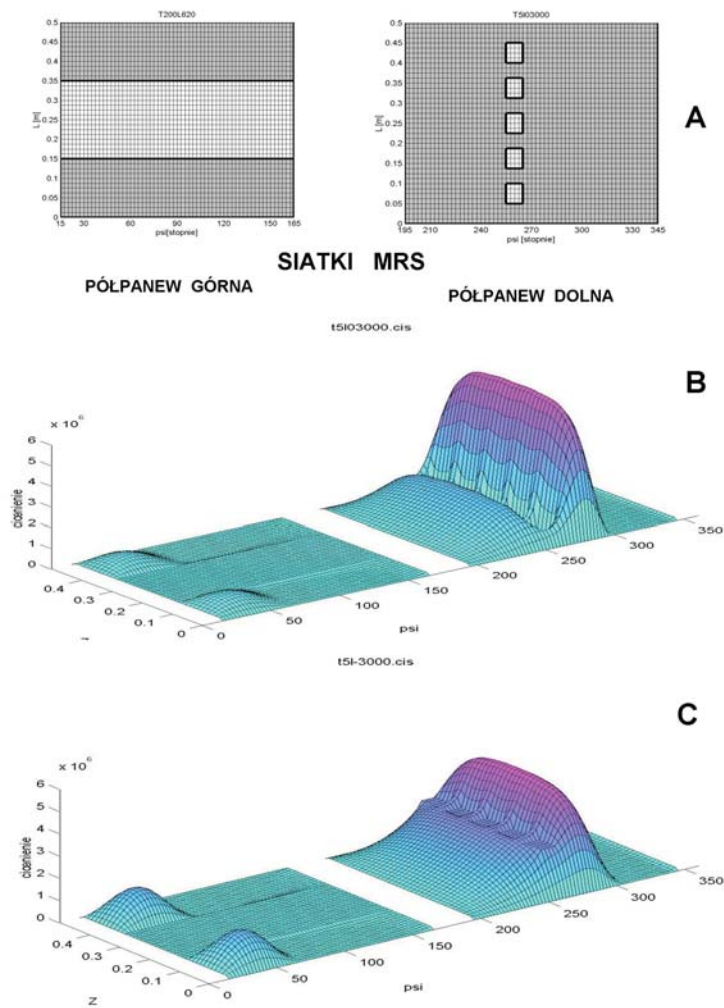


Rys. 2.33. Algorytm rozwiązania głównych równań tworzących diatermiczny model cieplny poprzecznego łożyska ślizgowego

Równanie Reynoldsa (2.26) oraz równania zakłócające (2.67) i (2.71) rozwiązywane są według identycznego schematu siatek MRS w płaszczyźnie $x - z$ (lub ψ, z) metodą iteracyjną SOR. W procesie rozwiązywania numerycznego tych równań łatwo możemy dowolnym węzłom siatki MRS przypisać stałe wartości ciśnienia, formułując tym samym dodatkowe (poza określonymi w podrozdziale 2.2.2.1) warunki brzegowe. W połączeniu z równaniami kształtu szczeliny smarnej (2.51)-(2.55) otwiera to nowe możliwości opisu łożysk z **kieszeniami lewarowymi i ciśnieniem lewarowym** i tym samym łożysk ze **smarowaniem hybrydowym**. Przykłady siatek MRS z kieszeniami lewarowymi wraz z przykładami rozwiązania tych równań (rozkładami ciśnienia hybrydowego: hydrodynamicznego i hydrostatycznego) przedstawiają rys. 2.34 oraz 2.35.



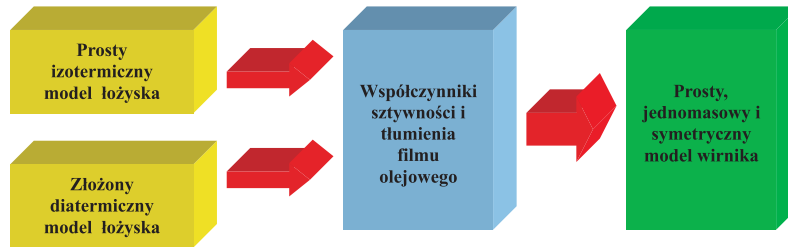
Rys. 2.34. Przykład siatki MRS z rowkiem olejowym (półpanew górna) i jedną kieszenią lewarową (półpanew dolna) – A; rozkład ciśnienia w filmie przy zasilaniu lewarowym (smarowanie hybrydowe) – B; Smarowanie hybrydowe w warunkach zukosowanej panwi – C



Rys. 2.35. Przykład siatki MRS z rowkiem olejowym i kieszeniami lewarowymi typowej dla łożysk turbinowych – A; rozkład ciśnienia w filmie olejowym przy braku zasilania lewarowego – B i z ciśnieniem lewarowym – C

2.3 Podstawowe równania dynamiki

Stosownie do rozważań prowadzonych na początku tego rozdziału (patrz: uwagi w ramce) przedstawimy teraz zestaw równań odnoszący się do bardzo prostego modelu wirnika łożyskowanego ślizgowo, a mianowicie **wirnika jednomasowego i symetrycznego**. Równania ruchu w tym przypadku można przedstawić w eleganckiej, analitycznej formie. Punktem wyjścia będą oczywiście współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego wyznaczone ze związków (2.67), (2.71) i (2.64) dla określonego punktu równowagi statycznej czopa $(O_c)_{st}$. Powyższe stwarza nam bardzo interesującą możliwość kombinacji modeli. Współczynniki sztywności i tłumienia łożysk ślizgowych możemy określić bazując zarówno na prostym (izotermicznym) jak i złożonym (diatermicznym) modelu łożyska i tak określone współczynniki wprowadzić do prostego modelu wirnika. Ilustruje to schemat na rys. 2.36.



Rys. 2.36. Możliwe kombinacje prostego modelu wirnika z modelami łożyska

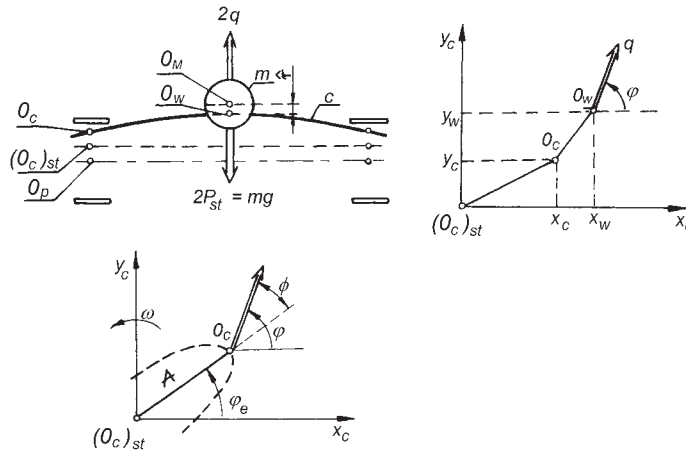
Wbrew pozorom taki model nie zawsze musi odbiegać zbyt mocno od modelu rzeczywistego. Wyobraźmy sobie sytuację, kiedy mamy do czynienia z bardzo sztywnym i w miarę symetrycznym wirnikiem oraz niewielkimi, sinusoidalnie zmiennymi w czasie, siłami zewnętrznymi wymuszającymi drgania układu. Taki układ dość dobrze opisują wspomniane powyżej modele kombinowane: prosty lub złożony model łożyska – prosty model wirnika. Również w przypadkach, kiedy chcemy głównie analizować własności samych łożysk ślizgowych (np.: nowo zaprojektowanych) to zawsze lepiej jest to uczynić w powiązaniu z wirnikiem nawet prostym niż zupełnie go pomijając (co jest niestety powszechną praktyką). Wynika to z faktu oczywistych związków jakie zachodzą pomiędzy łożyskami i maszyną, o czym pisaliśmy wcześniej.

Oczywiście we wszystkich innych przypadkach musimy stosować złożony model wirnika wielomasowego i wielopodporowego opisanego w podrozdziale 2.1 skojarzonego z diatermicznym modelem łożysk ślizgowych przedstawionym w rozdziale 2.2 i z macierzami podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej opisanymi w rozdziale 1.

2.3.1 Równania ruchu dla wirnika jednomasowego i symetrycznego

Przyjmijmy do rozważań prosty model wirnik-łożyska z wirnikiem jednomasowym, symetrycznym ułożyskowanym na dwóch identycznych łożyskach. Przyjmując za podstawę rozważań współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego możemy uzyskać interesujące i praktyczne informacje odnośnie własności dynamicznych takiego układu takie jak: częstości drgań własnych, granica stabilności lub też parametry elipsy drgań w przypadku różnego rodzaju wymuszeń zewnętrznych.

Wyprowadźmy podstawowe równania opisujące tego rodzaju układ. Przyjmijmy do rozważań model układu wirnik-łożyska jak na rys. 2.37. Pod wpływem działania siły wymuszającej $2q$ przyłożonej w środku masy wirnika, czop łożyska wykonuje małe oscylacje względem punktu równowagi statycznej $(O_c)_{st}$. Reakcje hydrodynamiczne filmu olejowego możemy więc przedstawić w postaci (w układzie $x_c - y_c$ - rys. 2.37):



Rys. 2.37. Prosty model układu wirnik-łożyska

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_x &= W_x - W_{x_o} = c_{11}x_c + c_{12}y_c + d_{11}\dot{x}_c + d_{12}\dot{y}_c \\ \Delta W_y &= W_y - W_{y_o} = c_{21}x_c + c_{22}y_c + d_{21}\dot{x}_c + d_{22}\dot{y}_c \end{aligned} \right\}, \quad (2.74)$$

gdzie: c_{ik} oraz d_{ik} to współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego

Podatność wirnika określimy poprzez stałą sprężystości wału (sztywność) c w [N/m] lub strzałką ugięcia spowodowaną ciężarem własnym wirnika:

$$f_{st} = \frac{mg}{c} \quad [\text{m}].$$

Równania ruchu środka masy wirnika O_w przyjmą postać (dla wygody zapisu

opuścimy indeks c oznaczający opis w układzie współrzędnych x_c, y_c :

$$\left. \begin{aligned} -m\ddot{x}_w - c(x_w - x) + 2q_x &= 0 \\ -m\ddot{y}_w - c(y_w - y) + 2q_y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.75)$$

natomiast dla czopa O_c będzie:

$$\left. \begin{aligned} 2\Delta W_x + c(x_w - x) &= 0 \\ 2\Delta W_y + c(y_w - y) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.76)$$

gdzie: x_w, y_w oznaczają współrzędne ruchu środka wirnika; x, y – współrzędne ruchu środka czopa w układzie współrzędnych $x_c - y_c$ związanym z punktem równowagi statycznej $(O_c)_{st}$.

Wyznaczając ze zw. (2.74) wyrażenia na $x_w - y_w$ i różniczkując dwukrotnie względem czasu t , a następnie wstawiając wynik do zw. (2.75) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} -m(\ddot{x} - \frac{2}{c}\Delta\ddot{W}_x) + 2\Delta W_x + 2q_x &= 0 \\ -m(\ddot{y} - \frac{2}{c}\Delta\ddot{W}_y) + 2\Delta W_y + 2q_y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.77)$$

gdzie $\Delta W_x, \Delta W_y$ opisują zw. (2.74).

Przyjmijmy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$X = \frac{x}{\Delta R} \quad Y = \frac{y}{\Delta R} \quad \text{dla współrzędnych z układu } x_c, y_c,$$

$$\tau = \omega t \quad \text{bezwymiarowy czas,}$$

$$(\overset{\cdot}{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (\overset{\cdot}{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial \tau} \quad \text{różniczkowanie względem bezwymiarowego czasu } \tau,$$

$$\Delta \bar{\Pi}_{x,y} = \frac{\Delta W_{x,y} (\Delta R/R)^2}{LD \mu_0 \omega} \quad \text{bezwymiarowe przyrosty reakcji hydrodynamicznej,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta R}} \quad \text{wymiarowy parametr odniesienia w [rd/s] (g – przyspieszenie ziemskie),}$$

$$\alpha_0 = S_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \quad \text{bezwymiarowa „masa” wirnika,}$$

$$Q_{x,y} = \frac{q_{x,y}}{LD} \frac{(\Delta R/R)^2}{\mu_0 \omega} \quad \text{bezwymiarowe składowe siły wymuszającej drgania układu,}$$

$$\hat{\mu} = \frac{f_{st}}{\Delta R} = \frac{mg}{c\Delta R} \quad \text{względna elastyczność wirnika,}$$

$$S_0 = \frac{P_{st}}{LD} \frac{(\Delta R/R)^2}{\mu_0 \omega} \quad \text{liczba Sommerfelda, } P_{st} \text{ - obciążenie statyczne łożyska.}$$

Równanie ruchu (2.77) możemy teraz napisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_0 \overset{\parallel}{X} + \hat{\mu} \Delta \overset{\parallel}{\Pi}_x \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \Delta \overset{\parallel}{\Pi}_x + Q_x &= 0 \\ -\alpha_0 \overset{\parallel}{Y} + \hat{\mu} \Delta \overset{\parallel}{\Pi}_y \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \Delta \overset{\parallel}{\Pi}_y + Q_y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.78)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} \Delta \overset{\parallel}{\Pi}_x &= \gamma_{11} X + \gamma_{12} Y + \beta_{11} \overset{\perp}{X} + \beta_{12} \overset{\perp}{Y} \\ \Delta \overset{\parallel}{\Pi}_y &= \gamma_{21} X + \gamma_{22} Y + \beta_{21} \overset{\perp}{X} + \beta_{22} \overset{\perp}{Y} \end{aligned} \right\}, \quad (2.79)$$

natomiast współczynniki $\gamma_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ określają zw. (2.64).

Równania (2.78) obejmują zarówno przypadek wirnika nieskończenie sztywnego ($\hat{\mu} = 0$) jak i bezmasowego ($\alpha_0 = 0$) – mają więc one dla przyjętego modelu – charakter ogólny.

2.3.2 Drgania wymuszone

Załóżmy, że działająca na układ siła $2q$ (rys. 2.37) jest siłą okresową, periodycznie zmienną, przy czym prędkość kątowna tych zmian może być różna od prędkości wirowania wirnika. Rozpatrzmy trzy przypadki:

- siły stałej wirującej z częstotliwością Ω ,
- siły jednokierunkowej pulsującej z częstotliwością Λ ,
- siły stałej wirującej pochodzącej od niewyważenia wirnika $\Omega = \omega$.

Stać siła wirująca

Siłę q (wymiarową lub Q (bezwymiarową) możemy zdefiniować następująco

$$\left. \begin{aligned} q &= r_B P_{st} \\ \varphi &= k_\Omega \omega t \end{aligned} \right\} \quad \text{lub} \quad \left. \begin{aligned} Q &= r_B S_0 \\ \varphi &= k_\Omega \tau \end{aligned} \right\}, \quad (2.80)$$

gdzie

$$k_\Omega = \pm \Omega / \omega,$$

co oznacza że stała siła q , będąca częścią obciążenia wirnika P_{st} , wiruje w kierunku zgodnym lub przeciwnym do kierunku wirowania wirnika z prędkością stałą lecz różną od prędkości ω .

Składowe siły Q będą miały postać:

$$Q_x = r_B S_0 \cos(k_\Omega \tau),$$

$$Q_y = r_B S_0 \sin(k_\Omega \tau).$$

Przewidując rozwiązanie równania (78) w postaci:

$$\left. \begin{aligned} X &= A_\Omega \sin(k_\Omega \tau) + B_\Omega \cos(k_\Omega \tau) \\ Y &= C_\Omega \sin(k_\Omega \tau) + D_\Omega \cos(k_\Omega \tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

a następnie różniczkując względem τ związki (2.81), oraz (2.79), równanie (2.78) po przekształceniach możemy przedstawić następująco:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Omega^2 - \gamma_{11} & \beta_{11} k_\Omega & -\gamma_{12} & \beta_{12} k_\Omega \\ -\beta_{11} k_\Omega & -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Omega^2 - \gamma_{11} & -\beta_{12} k_\Omega & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & \beta_{21} k_\Omega & -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Omega^2 - \gamma_{22} & \beta_{22} k_\Omega \\ -\beta_{21} k_\Omega & -\gamma_{21} & -\beta_{22} k_\Omega & -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Omega^2 - \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\Omega \\ B_\Omega \\ C_\Omega \\ D_\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r_B S_0}{\omega^*} \\ \frac{r_B S_0}{\omega^*} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

gdzie $\omega^* = 1 - \hat{\mu} k_\Omega^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

Rozwiązanie układu równań (2.82) daje poszukiwane wartości A_Ω , B_Ω , C_Ω , D_Ω , które jednoznacznie określają wszystkie parametry charakterystyczne elipsy drgań (zw. 2.81), a więc amplitudę drgań, kąt nachylenia osi dużej czy kąt przesunięcia fazowego.

Jednokierunkowa siła pulsująca

Przypadek ten możemy opisać następująco

$$\left. \begin{array}{l} q = r_A P_{st} \sin(k_\Lambda \omega t) \\ \varphi = \varphi_0 \end{array} \right\} \text{ lub } \left. \begin{array}{l} Q = r_A S_0 \sin(k_\Lambda \tau) \\ \varphi = \varphi_0 \end{array} \right\}, \quad (2.83)$$

gdzie

$$k_\Lambda = \pm \Lambda / \omega,$$

co oznacza, że przyłożona do układu pod stałym kierunkiem φ_0 siła q pulsuje sinusoidalnie z prędkością Λ stałą lecz różną od prędkości kątowej wirownika ω .

Składowe siły Q będą miały postać:

$$\begin{aligned} Q_x &= r_A S_0 \sin(k_\Lambda \tau) \cos \varphi_0, \\ Q_y &= r_A S_0 \sin(k_\Lambda \tau) \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Tak jak poprzednio przewidujemy rozwiązanie równania (2.78) w postaci:

$$\left. \begin{array}{l} X = A_\Lambda \sin(k_\Lambda \tau) + B_\Lambda \cos(k_\Lambda \tau) \\ Y = C_\Lambda \sin(k_\Lambda \tau) + D_\Lambda \cos(k_\Lambda \tau) \end{array} \right\}, \quad (2.84)$$

co sprowadza równanie (78) do następującego układu:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Lambda^2 - \gamma_{11} & \beta_{11} k_\Lambda & -\gamma_{12} & \beta_{12} k_\Lambda \\ -\beta_{11} k_\Lambda & -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Lambda^2 - \gamma_{11} & -\beta_{12} k_\Lambda & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & \beta_{21} k_\Lambda & -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Lambda^2 - \gamma_{22} & \beta_{22} k_\Lambda \\ -\beta_{21} k_\Lambda & -\gamma_{21} & -\beta_{22} k_\Lambda & -\frac{\alpha_0}{\omega^*} k_\Lambda^2 - \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\Lambda \\ B_\Lambda \\ C_\Lambda \\ D_\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r_A S_0 \cos \varphi_0}{\omega^*} \\ \frac{r_A S_0 \sin \varphi_0}{\omega^*} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

gdzie $\omega^* = 1 - \hat{\mu}k_\Lambda^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

Drgania spowodowane niewyważeniem wirnika

Największe znaczenie, z praktycznego punktu widzenia, mają drgania układu spowodowane niewyważeniem wirujących mas. W naszym modelu, przyjmując, że promień niewyważenia wirującej masy m wynosi \hat{r} , oznacza to następujący zapis siły dynamicznej q :

$$\left. \begin{aligned} 2q &= m\hat{r}\omega^2 \\ \varphi &= \omega t \end{aligned} \right\}, \quad (2.86)$$

$$\rho = \frac{\hat{r}}{\Delta R},$$

możemy też zw. (2.86) przedstawić w postaci

$$\left. \begin{aligned} Q &= S_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rho = \alpha_0 \rho \\ \varphi &= \tau \end{aligned} \right\}. \quad (2.87)$$

Zauważamy natychmiast, że drgania spowodowane niewyważeniem stanowią przypadek szczególny obciążenia stałą siłą wirującą, a więc przypadek szczególny równań (2.80) i (2.82). Kładąc

$$\left. \begin{aligned} r_B &= \rho \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \\ k_\Omega &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

do układu równań (2.82) otrzymamy rozwiązanie (2.81) właściwe dla przypadku drgań wymuszonych spowodowanych niewyważeniem wirnika.

Dotychczas otrzymane rozwiązania w postaci zw. (2.81) lub (2.84) odnoszą się do ruchu czopa w łożysku. Wyprowadzimy teraz związki określające ruch środka wirnika O_w dla przyjętego modelu teoretycznego.

Pozostając przy przypadku drgań spowodowanych niewyważeniem łatwo możemy wyprowadzić następującą postać równań

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_0 \overset{\parallel}{X}_w - \frac{S_0}{\hat{\mu}} (X_w - X) + \rho \alpha_0 \cos \tau &= 0 \\ -\alpha_0 \overset{\parallel}{Y}_w - \frac{S_0}{\hat{\mu}} (Y_w - Y) + \rho \alpha_0 \sin \tau &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.89)$$

gdzie X, Y oznaczają znane już z równań (2.81) przemieszczenia środka czopa.

Również dla środka wirującego O_w przewidujemy rozwiązanie równań (2.89) w postaci:

$$\left. \begin{aligned} X_w &= A_w \sin \tau + B_w \cos \tau \\ Y_w &= C_w \sin \tau + D_w \cos \tau \end{aligned} \right\}, \quad (2.90)$$

co po odpowiednich działaniach prowadzi do wyniku:

$$\left. \begin{aligned} A_w &= \frac{A_\Omega}{1 - \hat{\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} & C_w &= \frac{C_\Omega + \rho \mu \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 - \hat{\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \\ B_w &= \frac{B_\Omega + \rho \mu \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 - \hat{\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} & D_w &= \frac{D_\Omega}{1 - \hat{\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2.91)$$

gdzie: A_Ω , B_Ω , C_Ω , D_Ω stanowią rozwiązanie układu równań (2.82) z warunkami (2.88).

W punkcie charakterystycznym:

$$\hat{\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1,$$

z równań (2.82) wypada (dla $k_\Omega = 1$): $A_\Omega = D_\Omega = 0$, a więc i $A_w = D_w = 0$. Wyrażenia na B_w i C_w mają w tym punkcie skończoną granicę.

Przyjęty model wirnika posiada znany charakterystyczny parametr, a mianowicie prędkość kątową krytyczną ω_k , zdefiniowaną według elementarnej zależności:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad [\text{rd/s}].$$

Łatwo można wykazać, że pomiędzy wprowadzonym wcześniej parametrem odniesienia ω_0 a prędkością krytyczną ω_k zachodzi prosta zależność

$$\omega_0 = \sqrt{\hat{\mu}} \omega_k. \quad (2.92)$$

Dla $\hat{\mu} = 1$ będzie po prostu $\omega_0 = \omega_k$, a wyrażenie $(\omega/\omega_0)^2 = 1$ oznacza fizycznie przypadek rezonansu, a więc moment, w którym prędkość kątowna wirnika ω równa się prędkości krytycznej ω_k przyjętego prostego układu (jednomasowej elastycznej belki sztywno podpartej na końcach).

Wszystkie wyprowadzone związki tzn. równanie (2.82), (2.85), (2.88) oraz (2.91) pozwalają nam analizować bardzo szeroki zakres zmian zewnętrznej siły wymuszającej Q i tym samym badać właściwości układu dla różnych $\hat{\mu}$, k_Ω , k_Λ , r_A , r_B , ρ .

2.3.3 Drgania swobodne

Drgania swobodne przyjętego modelu wirnika (rys. 2.37) opisują równania homogeniczne ($Q_x = Q_y = 0$) układu równań (2.78), a więc

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_0 \overset{\parallel}{\parallel} X + \hat{\mu} \Delta \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \Delta \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} X &= 0 \\ -\alpha_0 \overset{\parallel}{\parallel} Y + \hat{\mu} \Delta \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \Delta \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} \overset{\parallel}{\parallel} Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

gdzie: $\Delta\bar{\Pi}_x, \Delta\bar{\Pi}_y$ opisują zw. (2.79).

Rozwiązanie układu równań (2.93) przewidujemy teraz w postaci:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_A e^{\lambda\tau} \\ Y &= Y_A e^{\lambda\tau} \end{aligned} \right\}, \quad (2.94)$$

Przeprowadzając odpowiednie działania dochodzimy do następującego równania charakterystycznego

$$C_6\lambda^6 + C_5\lambda^5 + C_4\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 = 0, \quad (2.95)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= A_0 \\ C_1 &= A_1 \\ C_2 &= A_2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 [S_0 A_4 + 2\hat{\mu} A_0] \\ C_3 &= \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 [S_0 A_3 + 2\hat{\mu} A_1] \\ C_4 &= 2\hat{\mu} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 A_2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 [S_0^2 + \hat{\mu} S_0 A_4 + \hat{\mu}^2 A_0] \\ C_5 &= \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 [\hat{\mu}^2 A_1 + \hat{\mu} S_0 A_3] \\ C_6 &= \hat{\mu}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 A_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2.96)$$

natomiast:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} \\ A_1 &= \gamma_{11}\beta_{22} + \gamma_{22}\beta_{11} - \gamma_{12}\beta_{21} - \gamma_{21}\beta_{12} \\ A_2 &= \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12} \\ A_3 &= -\beta_{11} - \beta_{22} \\ A_4 &= -\gamma_{11} - \gamma_{22} \end{aligned} \right\}. \quad (2.97)$$

Drgania swobodne układu mechanicznego opisanego równaniem 2.95 opisują jego pierwiastki zespolone

$$\lambda_n = \frac{u_n}{\omega} + i \frac{v_n}{\omega}, \quad (2.98)$$

gdzie: $n = 1, 2, \dots, 6$. Możemy teraz napisać, np.: dla składowej X

$$X_n = X_{An} e^{\lambda_n \tau} = X_{An} e^{\frac{u_n}{\omega} \tau} e^{i \frac{v_n}{\omega} \tau}. \quad (2.99)$$

Łatwo zauważyć, że pierwszy człon równania (2.99) opisuje tłumienie, a drugi częstość drgań własnych układu. Układ będzie bowiem stabilny jeśli człon

$$e^{\frac{u_n}{\omega} \tau},$$

z upływem czasu τ będzie malał do zera (dla wszystkich częstości własnych), co oznacza ujemną część rzeczywistą pierwiastków λ_n czyli $u_n < 0$. A zatem:

u_n – tłumienie odpowiadające n -tej częstości własnej układu [rd/s],
 v_n – n -ta częstość własna układu [rd/s].

Równanie (2.95) jeśli ma rozwiązania zespolone (opisujące drgania układu mechanicznego) to tylko parami sprzężone. Oznacza to, że model wirnika przedstawiony na (rys. 2.37) i opisany równaniem (2.94), może mieć co najwyżej trzy fizyczne częstości drgań własnych i trzy odpowiadające im tłumienia.

Łatwo zauważyć, że dla wirnika nieskończenie sztywnego ($\hat{\mu} = 0$) równanie charakterystyczne (2.95) staje się wielomianem czwartego stopnia, w więc układ może posiadać co najwyżej dwie częstości drgań własnych i dwa odpowiadające im tłumienia.

Wyprowadzimy jeszcze związki określające bardzo ważną, z technicznego punktu widzenia, właściwość układu, a mianowicie granicę jego stabilności. Z interpretacji tłumienia układu u_n wynika, że drgania będą zanikać, jeśli będzie $u_n < 0$, i odwrotnie, drgania z upływem czasu τ będą wzrastały jeśli $u_n > 0$ (dla wszystkich częstości drgań własnych). Łatwo możemy stąd wywnioskować, że granicę stabilnej pracy układu reprezentować będzie warunek zerowej wartości tłumienia $u_n = 0$, czyli

$$\lambda_{gr} = i \frac{v_{gr}}{\omega}. \quad (2.100)$$

Wstawiając warunek (2.100) do równania (2.95), po przekształceniach otrzymamy:

$$\left(\frac{\omega_{gr}}{\omega_0} \right)^2 = \frac{A_1 A_2 A_3^2}{[\hat{\mu} A_1 + S_0 A_3] [A_1^2 - A_1 A_3 A_4 + A_0 A_3^2]}, \quad (2.101)$$

gdzie: współczynniki A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 opisują zw. (2.97), a ω_{gr} oznacza granicę stabilności przyjętego układu.

Często w literaturze przyjmuje się interpretację, że ujemna wartość współczynnika u_n oznacza w rzeczywistości dodatnie tłumienie, co z pewnością znajduje swoje uzasadnienie fizyczne. My również pozostaniemy w dalszych rozważaniach przy tej interpretacji.

2.4 Dyskusja modelu

Przejdźmy teraz do zagadnień związanych z dyskusją złożonego modelu maszyny wirnikowej przedstawionego w rozdziałach 1, oraz podrozdziałach 2.1 i 2.2. Przedstawiony na rys. 2.33 algorytm obliczeń odnosi się wyłącznie do łożysk ślizgowych. Efektem końcowym tej procedury są współczynniki sztywności i tłumienia filmu olejowego łączące łożyska z pozostałymi podukładami maszyny wirnikowej. Stąd też algorytm ten stanowi w istocie część ogólnego algorytmu przedstawionego na rys. 1.2. Z drugiej strony czynnikiem spinającym model maszyny wirnikowej w całość są macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej (zw.(1.20), (1.30), (1.31), (1.32) – rozdz. 1) wraz ze związkami umożliwiającymi ich transformację (zw. (1.35)-(1.55) – rozdz.1) i obróbkę matematyczną według koncepcji funkcji wagowych (zw.(1.56)-(1.59) i rys. 1.13 z rozdz.1). I wreszcie sam model

MES linii wirników przedstawiony w rozdziale 2.1 (zw.(2.1)-(2.16) wraz ze strukturą macierzy globalnych – rys. 2.14) na którym skupiają się oddziaływania zarówno łożysk ślizgowych jak konstrukcji podpierającej, uzupełnia kompleksowy model całego układu.

Koncepcja zintegrowania modelu układu: linia wirników-łożyska ślizgowe-konstrukcja podpierająca poprzez współczynniki sztywności i tłumienia oraz macierze podatności przedstawiona została już wcześniej na rys. 2.1.

Wszystkie podane wyżej zależności w istocie tworzą globalne macierze mas \mathbb{M} , tłumienia \mathbb{D} i sztywności \mathbb{K} ogólnego równania ruchu całego układu (zw. (1.5) – rozdz.1). Przypomnijmy to fundamentalne równanie raz jeszcze:

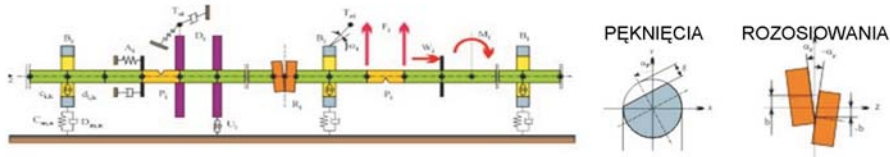
$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbb{D}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbb{K}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{x} = \mathbb{P}(t).$$

Podstawowy problem stanowi tu, jak pamiętamy, zależność macierzy \mathbb{D} i \mathbb{K} od parametrów ruchu układu i to zależność silnie nieliniową. Fakt ten narzuca konieczność postępowania iteracyjnego według ogólnego algorytmu przedstawionego na rys. 1.2 i przyjęcia zupełnie nowej metodologii rozwiązania problemu (patrz: rozdz.1). Nie można też wyprowadzić równań dynamiki w formie analitycznej tak jak w przypadku prostego modelu wirnika (patrz: podrozdział 2.3) ponieważ parametry dynamiczne układu uwikłane są w parametrach ruchu $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ powyższego równania (czyli w trajektoriach przemieszczeń i prędkości oraz w widmach drgań).

W podsumowaniu możemy stwierdzić, że opracowany w IMP PAN w Gdańsku model maszyny wirnikowej stanowi zestaw wielu równań i zależności o bardzo złożonej strukturze. Otwiera on nowe możliwości w badaniach tego typu maszyn. Ogólną charakterystykę modelu w formie poglądowej przedstawia rys. 2.38.

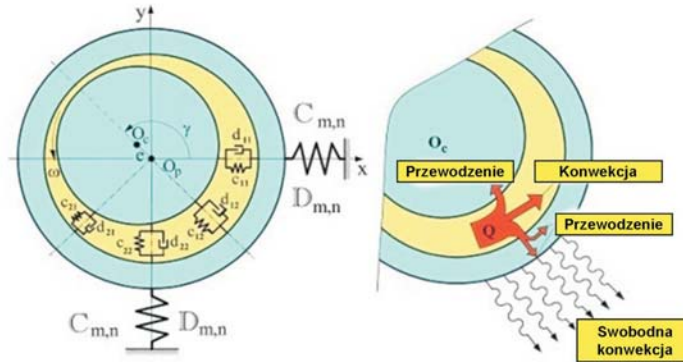
W rozdziale 3 niniejszej monografii przedstawimy programy komputerowe bazujące na niniejszym modelu i przykłady jego weryfikacji. Programy te tworzą spójne środowisko o nazwie MESWIR i stanowią podstawowe narzędzie badawcze za pomocą którego będą uzyskiwane wyniki badań prezentowane w niniejszej monografii.

LINIA WIRNIKÓW: 1-D MODEL MES Z IMPERFEKCJAMI



ŁOŻYSKA ŚLIZGOWE: 3-D DIATERMICZNY MODEL CIEPLNY

- ZŁOŻONA GEOMETRIA SZCZELINY SMARNEJ – ŁOŻYSKA WIELOKLINOWE
- KIESZENIE LEWAROWE – SMAROWANIE HYBRYDOWE
- ZUKOSOWANE/PREKOSZONE PANWIE



KONSTRUKCJA PODPIERAJĄCA: 3-D MODEL MES Z PRZEDZIAŁAMI ADEKWATNOŚCI PODPÓR

- DOBÓR PRZEDZIAŁÓW ADEKWATNOŚCI W OPARCIU O CHARAKTERYSTYKI PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ
- OKREŚLENIE MACIERZY SZTYWNOŚCI I TŁUMIENIA PODPÓR WEDŁUG KONCEPCJI FUNKCJI WAGOWYCH

WYNIK ANALIZY:



SPRĘŻONE FORMY DRGAŃ GIĘTNO-WZDŁUŻNO-SKRĘTNYCH I ZŁOŻONE WIDMA DRGAŃ UKŁADU, CHARAKTERYSTYKI ŁOŻYSK

Rys. 2.38. Model układu: linia wirników-łożyska ślizgowe-konstrukcja podpierająca opracowany w IMP PAN w Gdańsku

Bibliografia do rozdziału 2

- [2.1] Kiciński J., Markiewicz-Kicińska A.: *Programy NLDW-70 i NLDW-71 do obliczeń sprzężonych form drgań giętno-wzdłużno-skrętnych z imperfekcjami typu pęknięcia wału i rozosiowania elementów*, Oprac. zewn. IMP PAN, nr 357/2000, Gdańsk 2000.
- [2.2] Kiciński J.: *Identyfikacja własności dynamicznych konstrukcji podpierających maszyn wirnikowych*, Oprac. zewn. IMP PAN, nr 655/2000, Gdańsk 2000.
- [2.3] Krawczuk M.: *Algorytmy programów komputerowych do analizy dynamiki wirników maszyn energetycznych*, Oprac. wewn. IMP PAN, Gdańsk.
- [2.4] Krawczuk M.: *Dynamika elementów konstrukcyjnych z pęknięciami zmęczeniowymi*, Zeszyty Naukowe IMP PAN, nr 441/1398/94.
- [2.5] Cowper G. R.: *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory*, ASME, J. of Applied Mechanics, 1966, Vol. 32, 335-340.
- [2.6] Krawczuk M.: *Finite Timoshenko-type beam element with a crack*, Engineering Trans., 40, 1992, 229-248.
- [2.7] Ostachowicz W., Krawczuk M.: *Coupled torsional and bending vibrations of a rotor with an open crack*, Ingenieur-Archiv, 62, 1992, 191-201.
- [2.8] ABAQUS 4.9, *User Manual*, HBS Inc.
- [2.9] Tada H., Paris P.C., Irwin G. R.: *The Stress Analysis of Cracks – Handbook*, Del Research Corporation, St. Louis, USA, 1973.
- [2.10] Kruszewski J. i inni: *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, Arkady, Warszawa 1984.
- [2.11] Kiciński J.: *Teoria i badania hydrodynamicznych poprzecznych łożysk ślizgowych*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1994.
- [2.12] Przemieniecki J. S.: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York 1968.
- [2.13] Kiciński J., Drozdowski R., Materny P.: *The non-linear analysis of the effect of support construction properties on the dynamic properties of multi-support rotor systems*, J. of Sound & Vibration 206(4), 1997, 523-539.
- [2.14] Kiciński J., Drozdowski R., Materny P.: *Nonlinear model of vibrations in a rotor – bearings system*, J. of Vibration & Control, Vol. 4, n. 5, 1998, 519-540.
- [2.15] Kiciński J.: *Nonlinear model of vibration in rotor/bearings system – calculation algorithm*, Machine Dynamics Problems, Vol. 15, 1996, 45-60.

- [2.16] Kiciński J.: *Nonlinear model of vibration in rotor/bearings system – calculation results*, Machine Dynamics Problems, Vol. 15, 1996, 61-73.
- [2.17] Walczyk Z.: *Metody określania danych wejściowych do programów obliczania giętych drgań linii okrętowych wałów napędowych i wirników maszyn energetycznych oraz strategii przeprowadzania takich obliczeń*, Raport z pracy badawczej nr 45632/97, Pol. Gdańska, 1997.
- [2.18] Walczyk Z.: *Dynamika wirnikowych maszyn energetycznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Mechanika nr 64, 1992.
- [2.19] Muszynska A.: *Improvements in lightly loaded rotor/bearing and rotor/seal models*, Trans. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 110, 1988, 129-136.
- [2.20] Muszynska A., Franklin W. D., Bently D. E.: *Rotor active „anti-swirl” control*, Trans. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1988, Vol. 110, 143-150.
- [2.21] Muszynska A., Bently D. E.: *Anti-swirl arrangements prevent rotor/seal instability*, Trans. of the ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 111, 1989, 156-162.
- [2.22] Muszynska A., Bently D. E.: *Fluid-induced instabilities of rotors: whirl and whip*, Bently Rotor Dynamics Research Corporation Report No. 3, 1995.
- [2.23] Nandi A., Neogy S.: *Dynamic response of cracked beams and beams with an imperfect support*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore 2000, (na CD, poz. CP 114).
- [2.24] Rao J. S., Sreenivas R.: *Dynamic analysis of misaligned rotor systems*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore 2000, (na CD, poz. CP 048).
- [2.25] Kiciński J., Markiewicz – Kicińska A.: *Coupled non-linear vibrations in multi-support rotors founded on slide bearings*, Proc. of VETOMAC-1 Conf., Bangalore 2000, (na CD, poz. CP 047).
- [2.26] Kiciński J.: *Coupled non-linear vibrations in multisupported rotors*, Polish Maritime Research, no 3, September 2000, 9-13.
- [2.27] Chan D. S. H.: *Nonlinear analysis of rotor dynamic instabilities in high-speed turbomachinery*, Trans. of the ASME, J. of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 118, January 1996, 122-129.
- [2.28] Guido A. R., Adiletta G.: *Dynamics of a rigid unbalanced rotor with nonlinear elastic restoring forces. Part I: Theoretical analysis*, Nonlinear Dynamics, 19,1 999, 359-385.
- [2.29] Guido A. R., Adiletta G.: *Dynamics of a rigid unbalanced rotor with nonlinear elastic restoring forces. Part II: Experimental analysis*, Nonlinear Dynamics, 19, 1999, 387-397.

- [2.30] Adiletta G., Guido A. R., Rossi C.: *Nonlinear dynamics of a rigid unbalanced rotor in journal bearings. Part I: Theoretical Analysis*, Nonlinear Dynamics, 1997, 14, 57-87.
- [2.31] Adiletta G., Guido A. R., Rossi C.: *Nonlinear dynamics of a rigid unbalanced rotor in journal bearings. Part II: Experimental Analysis*, Nonlinear dynamics, 14, 1997, 157-189.
- [2.32] Sundararajan P., Noah S. T.: *Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method – application to rotor systems*, Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics, Vol. 119, January 1997, 9-20.
- [2.33] Chu C. S., Wood K. L., Busch-Vishniac I. J.: *A nonlinear dynamic model with confidence bounds for hydrodynamic bearings*, Trans. of the ASME, J. of Tribology, Vol. 120, July 1998, 595-604.
- [2.34] Cholewa W., Kiciński J.: *Diagnostyka techniczna – odwrotne modele diagnostyczne*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997.
- [2.35] Zienkiewicz O. C.: *Metoda elementów skończonych*, ARKADY, Warszawa 1972.
- [2.36] Kruszewski J., Wittbrodt E., Walczyk Z.: *Drgania układów mechanicznych w ujęciu komputerowym. Tom I: Zagadnienia liniowe (1992), Tom II: Zagadnienia wybrane (1993)*. Seria: Wspomaganie komputerowe CAD CAM. WNT, Warszawa.
- [2.37] Knott J. F.: *Fundamentals of Fracture Mechanics*, Butterworths, London 1973.
- [2.38] Krawczuk M.: *Uzupełnienia do modelu belkowego elementu skończonego z pęknięciem i rozosiowaniem*, Oprac. wewn. IMP PAN, nr arch. 89/2000, Gdańsk 2000.
- [2.39] Kiciński J.: *Influence of thermal phenomena in the slide bearings on the dynamics of a simple rotor – bearings system*, Machine Dynamics Problems, Vol.6, 1993, 37-60.
- [2.40] Kiciński J., Haller R.: *Computer optimization on external fixings and preliminary clamp of a bush with respect to static and dynamic properties of journal bearings*, ASME Trans., J. of Tribology, Vol. 116, October 1994.
- [2.41] Kiciński J.: *New method of description of dynamic properties of slider bearings*, Wear, No. 132, 1989, 205-220.
- [2.42] Kiciński J.: *Łożyskowanie ślizgowe – stan i perspektywy rozwoju*, Mat. XVIII Sympozjonu PKM, Kielce-Ameliówka, wrzesień 1997, 29-49.

- [2.43] Kiciński J.: *Wybrane zagadnienia z zakresu statyki i dynamiki łożysk maszyn wirnikowych*, Mat. Krajowej Konf. Nauk.-Techn. INŻYNIERIA ŁOŻYSKOWANIA '96, Gdańsk, czerwiec 1996, 3-22.
- [2.44] Hebda M., Wachal A.: *Trybologia*, WNT, Warszawa 1980.
- [2.45] Barwell F. T.: *Łożyskowanie*, WNT, Warszawa 1984.
- [2.46] Włodarski J. K.: *Zużycie i smarowanie maszyn okrętowych*, Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1979.
- [2.47] Someya T.: *Journal – Bearing Databook*, Springer, Berlin 1989.
- [2.48] Pinkus O., Sternlicht B.: *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill, New York 1961.
- [2.49] Cameron A.: *The Principles of Lubrication*, Longman, London 1966.
- [2.50] Tipei N.: *Theory of Lubrication*, Stanford Univ. Press, London 1962.
- [2.51] Barwell F.: *Lubrication of Bearings*, Butterworths Sc. Publ., London 1956.
- [2.52] Wilcock D. F., Booser R. E.: *Bearing Design and Application*, McGraw-Hill, New York 1957.
- [2.53] Shaw M. C., Macks F.: *Analysis and Lubrication of Bearings*, McGraw-Hill, New York 1949.
- [2.54] Radzimovsky E. I.: *Lubrication of Bearings*, The Ronald Press Co., New York 1959.
- [2.55] Gross W. A., Matsch L. A. et al.: *Fluid Film Lubrication*, Wiley, New York 1980.
- [2.56] Lang O. R., Steinhilper W.: *Gleitlager*, Springer, Berlin 1978.